

任意自旋重強子之質量修正

The Mass Correction of Heavy Hadrons with Arbitrary Spin

葉聰文*

Tsung-Wen Yeh

(收件日期 96 年 3 月 19 日；接受日期 96 年 8 月 10 日)

摘要

本論文利用投影算子法來計算任意自旋重強子的任意階質量修正形式。

關鍵詞：重夸克、有效理論

*國立臺中教育大學科學應用與推廣學系

Abstract

In this paper, we employ the projection operator method to calculate an all order mass correction form for heavy hadrons with arbitrary spin.

Key words: Heavy quark, Effective theory

1 Introduction

The heavy quark system contains an approximate heavy flavor-spin symmetry at energies much lower than the heavy quark mass [1, 2]. This symmetry makes a lot of simplification in studies of heavy quark physics. For example, a number of different heavy meson transition form factors can be related to a few universal form factors by means of the symmetry. The phenomenological analysis can be made systematically by means of the heavy quark effective theory (HQET) [3, 4, 5]. The basic ingredient of HQET is the heavy quark effective field $h_v(x)$, which is defined as an infinite mass limit of the heavy quark field $Q(x)$

$$h_v(x) = \lim_{m_Q \rightarrow \infty} e^{im_Q v \cdot x} Q(x), \quad (1.1)$$

where the velocity v^μ is introduced to denote the heavy quark mass part $m_Q v^\mu$ of the heavy quark momentum $P_Q^\mu = m_Q v^\mu + k^\mu$. The residual momentum k^μ has a scale (about Λ_{QCD}) much smaller than m_Q . It is just the momentum fluctuations due to the strong interactions between the heavy quark and the light brown muck inside a heavy hadron. The light brown muck represents the degrees of freedom of a heavy hadron other than the heavy quark one. The heavy flavor-spin symmetry can be realized by constructing an effective Lagrangian density

$$L_v(x) = \bar{h}_v(x) i v \cdot D h_v(x), \quad (1.2)$$

where the covariant derivative iD^μ is defined to be $iD^\mu = i\partial^\mu - gA^{\mu,a}T^a$ with $A^{\mu,a}$ the gluon fields and T^a the color matrix in the fundamental representation. The effective Lagrangian density is explicitly invariant under the heavy flavor-spin symmetry, since it is independent of the flavor and spin of the heavy quark field.

To account for differences between heavy hadrons, one needs to include the mass corrections of order $O(1/m_Q^n)$ with $n \geq 1$. The mass corrections can be systematically computed by means of different $1/m_Q$ expansion methods. Due to a re-parameterization invariance [6, 7], there exist infinitely equivalent methods for $1/m_Q$ expansion [8]. The re-parameterization invariance demonstrates that the effective theory is invariant under the re-parameterization in v^μ and k^μ . In literature, there have existed the following $1/m_Q$ expansion methods: the equation of motion method [9, 10], the functional integration method [11], the projection operator method [12], and the others. The equation of motion method and the functional integration method are equivalent methods in different formalisms. As found in [13], there exist non-hermitian terms in the effective Lagrangian derived from the equation of motion method or the functional integration method. As pointed out in [12], the non-hermitian terms contain frequency modes whose energy scales are higher than m_Q . In HQET, these high frequency modes should also be integrated out. On the other hand, the projection operator method can correctly deal with these non-hermitian terms to arrive at a low energy effective theory without containing any frequency modes with energy scales greater than Λ_{QCD} .

For heavy hadron transition processes with multiple soft pion emissions, such as $B \rightarrow D\pi, D\pi\pi, \dots$, the chiral symmetry can also be exploited to construct the heavy hadron effective theory (HHET) [14, 15, 16, 17]. The heavy hadrons can be mesons or baryons, according to their spins being even or odd times of half integer. In general, the heavy hadron spin could be

greater than one. We will employ the Rarita-Swinger fields for those heavy hadrons with spin greater than one.

In this paper, we will employ the projection operator method to derive an all order mass correction form for heavy hadrons with arbitrary spin. The projection operator method applied to derive the mass corrections for the heavy quark and the heavy mesons will be introduced in Sec II and III. The all order mass correction forms for heavy baryons and heavy mesons with arbitrary spin will be given in Sec. IV and V, respectively. The last section is devoted for conclusions of this paper.

II. Review of projection operator method I: heavy quark

According to HQET, one can redefine the heavy quark field in this way

$$H(x) = e^{im_Q v \cdot x} Q(x), \quad (2.1)$$

to remove the large fluctuation phase factor $\exp(-im_Q v \cdot x)$ in the heavy quark field $Q(x)$. At energy scales much lower than the heavy quark mass scale m_Q , the relevant degrees of freedom in the field can be extracted by taking an infinite mass limit $m_Q \rightarrow \infty$ for $H(x)$ in the following way

$$h_v(x) = \lim_{m_Q \rightarrow \infty} H(x). \quad (2.2)$$

The $1/m_Q$ expansion is to derive mass correction terms in terms of $h_v(x)$. According to the projection operator method, it is just to derive a relation which can express $H(x)$ in terms of $h_v(x)$. The projection operator method is convenient in the momentum space. We take Fourier transformations for $H(x)$ and $h_v(x)$ into their momentum representations H and h_v . By summing over the spin degrees of freedom of H and h_v , we can express the projection operators in terms of H and h_v as

$$\Lambda^+ = \sum_r H_r \bar{H}_r = \frac{1 + \not{v}}{2} + \frac{\not{K}}{2m_Q}, \quad (2.3)$$

$$\Lambda_v^+ = \sum_r h_{v,r} \bar{h}_{v,r} = \frac{1 + \not{v}}{2}. \quad (2.4)$$

By applying Λ^+ on H and noting that the $(1 + \not{v})/2$ part of H is not equal to h_v , we then obtain the following mass expansion equation

$$\frac{(1 - \not{v})}{2} H = \frac{\not{K}}{2m_Q} H = \frac{\not{K}}{2m_Q - \not{K}} \frac{(1 + \not{v})}{2} H. \quad (2.5)$$

By making an ansatz that $(1 + \not{v})/2$ part of H would be proportional to h_v , we can derive the following result by some algebra manipulations [12]

$$H = \sqrt{\frac{1 + \not{K}/2m_Q}{1 - \not{K}/2m_Q}} h_v. \quad (2.6)$$

After arriving at the above result, we follow to take an inverse Fourier transformation to transform Eq. (2.6) into coordinate space

$$H(x) = \sqrt{\frac{1 + i\not{D}/2m_Q}{1 - i\not{D}/2m_Q}} h_v(x), \quad (2.7)$$

in which H and h_v have been transformed into their coordinate representation $H(x)$ and $h_v(x)$, and k^μ has been transformed into iD^μ . The detailed derivation for the computation made in this section is referred to [12].

III. Review of projection operator method II: heavy meson

For those heavy meson transition processes involving many low momentum pions, the chiral symmetry and heavy quark symmetry can be combined to make a lot of simplification in studies of these processes. Due to the spin interactions between the heavy quark and the light brown muck being suppressed by $1/m_Q$, the heavy mesons with quantum number $J^P = (0^-, 1^-)$ are degenerate in the infinite meass limit $m_Q \rightarrow \infty$. For heavy mesons with quantum number $J^P = (0^-, 1^-)$, it is convenient to write a compact heavy meson field $M(x)$ [15]

$$M(x) = \frac{m_M + i\not{d}}{2m_Q} \left(-P(x)\gamma_5 + P^{*\mu}(x)\gamma_\mu \right), \quad (3.1)$$

where $P(x)$ and $P^{*\mu}(x)$ are the pseudoscalar and vector heavy meson fields, and m_M is defined to be the mass of heavy pseudoscalar meson. The covariant derivative id^μ is defined to be

$$id^\mu = i\partial^\mu - V^\mu, \quad (3.2)$$

where the vector field V^μ is defined as

$$V^\mu = -\frac{i}{2} (\xi^\dagger \partial^\mu \xi + \xi \partial^\mu \xi^\dagger), \quad (3.3)$$

with ξ being the chiral matrix

$$\xi = \exp\left(i \frac{\lambda^a \phi^a}{F}\right). \quad (3.4)$$

The matrix λ^a is the $SU(2)$ or $SU(3)$ matrix, and the ϕ^a denotes a vector of pion fields. The F is the pion decay constant.

Due to the largeness of the heavy meson mass with respect to the low energy processes, it is useful to redefine the compact heavy meson field to remove its large phase factor $\exp(-im_M v \cdot x)$

$$\begin{aligned} \hat{M}(x) &= e^{im_M v \cdot x} M(x), \\ &= \left(\frac{1 + \not{v}}{2} + \frac{i\not{d}}{2m_Q} + \frac{\Lambda_M}{m_Q} \right) \left(-\hat{P}(x)\gamma_5 + \hat{P}^{*\mu}(x)\gamma_\mu \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

where we have defined

$$\hat{P}(x) = e^{im_M v \cdot x} P(x), \quad (3.6)$$

$$\hat{P}^{*\mu}(x) = e^{im_M v \cdot x} P^{*\mu}(x). \quad (3.7)$$

$\Lambda_M = m_M - m_Q$ is the mass difference between the heavy pseudoscalar meson and the heavy quark.

The effective compact heavy meson field $M_v(x)$, respecting the heavy quark and chiral symmetries, is defined to be the infinite mass limit $m_M, m_Q \rightarrow \infty$ of $\hat{M}(x)$, while the mass difference $\Lambda_M = m_M - m_Q$ is kept constant under this limit,

$$\begin{aligned}
M_v(x) &= \lim_{m_Q \rightarrow \infty} \hat{M}(x) \\
&= \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) (-P_v(x)\gamma_5 + P_v^{*\mu}(x)\gamma_\mu),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

where $P_v(x)$ and $P_v^{*\mu}(x)$ are the infinite mass limit $m_M, m_Q \rightarrow \infty$ of $\hat{P}(x)$ and $\hat{P}^{*\mu}(x)$, respectively.

To derive the mass corrections, we make a Fourier transformation for Eq. (3.8) to transform the relevant fields and the covariant derivative into their corresponding momentum representations as the following [18]

$$\hat{M} = \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{\not{k}}{2m_Q} + \frac{\Lambda_M}{m_Q} \frac{1+\gamma}{2} \right) (-\hat{P}\gamma_5 + \hat{P}^{*\mu}\gamma_\mu). \tag{3.9}$$

From the meaning of the projection operator, the first two terms in Eq. (3.9)

$$\left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{\not{k}}{2m_Q} \right)$$

can be identified as the projection operator for projecting out the heavy quark degrees of freedom from the mesons. The residual momentum k is assumed to be associated with the heavy quark degrees of freedom of the heavy mesons. This assumption for the residual momentum is consistent with that definition of the residual momentum in HQET. It is then reasonable to identify the projected part

$$\hat{P}_Q \equiv \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{\not{k}}{2m_Q} \right) \hat{P}$$

as the heavy quark degrees of freedom of \hat{P} . From this point of view, the projection operator method is convenient.

After identifying the heavy quark degrees of freedom of the heavy mesons, we can follow the similar procedure of deriving the mass correction form for the heavy quark field as shown in last section.

We now show how the derivation of the mass correction form for the pseudoscalar field $P(x)$ can be made by means of the projection operator method. By applying the projection operator, we first separate the projected parts into the heavy quark and light brown muck parts as

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{\not{k}}{2m_Q} + \frac{\Lambda_M}{m_Q} \frac{1+\gamma}{2} \right) \hat{P} \\
&= \left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{\not{k}}{2m_Q} \right) \hat{P} + \left(\frac{\Lambda_M}{m_Q} \frac{1+\gamma}{2} \right) \hat{P} \\
&\equiv \hat{P}_Q + \hat{P}_{\bar{q}}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

where the \hat{P}_Q denotes the projected heavy quark part and $\hat{P}_{\bar{q}}$ is the projected light brown muck part. To arrive at the mass correction, we further separate \hat{P}_Q into $(1+\gamma)/2$ and $(1-\gamma)/2$ parts as

$$\hat{\beta}_Q \equiv \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \hat{P}_Q, \hat{\chi}_Q = \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) \hat{P}_Q. \tag{3.11}$$

The projection operator $(1+\gamma)/2 + \not{k}/(2m_Q)$ is equivalent to the energy projection operator of the heavy degrees of freedom. This requires that the residual momentum k should satisfy the following on-shell condition

$$v \cdot k = -\frac{k^2}{2m_Q}. \quad (3.12)$$

We can apply $(1+\gamma)/2 + \not{k}/(2m_Q)$ on \hat{P}_Q to get the identity

$$\left(\frac{1+\gamma}{2} + \frac{\not{k}}{2m_Q} \right) \hat{P}_Q = \hat{P}_Q. \quad (3.13)$$

This gives us the following relations

$$\frac{1-\gamma}{2} \hat{P}_Q = \frac{\not{k}}{2m_Q} \hat{P}_Q, \quad (3.14)$$

and

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_Q &= \frac{\not{k}}{2m_Q} (\hat{\beta}_Q + \hat{\chi}_Q) \\ &= \frac{\not{k}}{2m_Q - \not{k}} \hat{\beta}_Q, \end{aligned} \quad (3.15)$$

where the second line of the above second equation is obtained by iterating the first line. After a simple manipulation, we get

$$\hat{P}_Q = \frac{2m_Q}{2m_Q - \not{k}} \hat{\beta}_Q. \quad (3.16)$$

The remaining task is to determine $\hat{\beta}_Q$. To go further, we make an assumption that $\hat{\beta}_Q$ is proportional to the $(1+\gamma)/2$ part of P_v , the momentum representation of $P_v(x)$. This leads to the following ansatz

$$\hat{\beta}_Q = (1 + \hat{\omega}_Q) P_{v,h}, \quad (3.17)$$

with

$$P_{v,h} = \frac{1+\gamma}{2} P_v, \quad \bar{\omega} = \gamma^0 \hat{\omega} \gamma^0 = \hat{\omega}.$$

$\hat{\omega}_Q$ is introduced to account for the difference between $\hat{\beta}_Q$ and the $(1+\gamma)/2$ part of P_v .

Because the projection operator can be expressed in terms of the spin sum of its projected degrees of freedom, we then have the following identities

$$\Lambda_Q^+ = \sum_r \hat{P}_{Q,r} \bar{\hat{P}}_{Q,r}, \quad \Lambda_h^+ = \sum_r P_{v,h,r} \bar{P}_{v,h,r}, \quad (3.18)$$

where

$$\Lambda_Q^+ = \frac{(1+\gamma)}{2} + \frac{\not{k}}{2m_Q}, \quad \Lambda_h^+ = \frac{(1+\gamma)}{2}. \quad (3.19)$$

From Eqs. (3.18) and (3.19), we get this identity

$$(1 + \hat{\omega}_Q) \Lambda_h^+ (1 + \hat{\omega}_Q) = \left(1 - \frac{\mathcal{K}}{2m_Q}\right) \Lambda_Q^+ \left(1 - \frac{\mathcal{K}}{2m_Q}\right). \quad (3.20)$$

The above equation implies the following quadratic equation

$$\hat{\omega}_Q^2 + 2\hat{\omega}_Q - \hat{T}_Q = 0, \quad (3.21)$$

where \hat{T}_Q is defined as

$$\begin{aligned} \hat{T}_Q &= \left(1 - \frac{\mathcal{K}}{2m_Q}\right) \Lambda_Q^+ \left(1 - \frac{\mathcal{K}}{2m_Q}\right) - \Lambda_h^+ \\ &= -\left(\frac{\mathcal{K}}{2m_Q}\right)^2 \Lambda_h^+, \end{aligned} \quad (3.22)$$

which is of $O(m_Q^{-2})$. By solving Eq. (3.21) and noting that $\hat{T}_Q \ll 1$, we then arrive at

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_Q &= -1 + (1 + \hat{T}_Q)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \hat{T}_Q - \frac{1}{8} \hat{T}_Q^2 + \frac{1}{16} \hat{T}_Q^3 - \frac{5}{128} \hat{T}_Q^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

We note that the solution of $\hat{\omega}_Q$ in Eq. (3.23) agrees with the ansatz made in Eq. (3.17). Since

$$(\hat{T}_Q)^n P_{v,h} = (-1)^n \left(\frac{\mathcal{K}}{2m_Q}\right)^{2n} P_{v,h}, \quad (3.24)$$

we finally obtain the mass correction form for the heavy degrees of freedom

$$\hat{P}_Q = \left(\frac{1 + \mathcal{K}/(2m_Q)}{1 - \mathcal{K}/(2m_Q)}\right)^{1/2} P_{v,h}. \quad (3.25)$$

The remaining task is to determine $\hat{P}_{\bar{q}}$. For this purpose, we use the following relations obtained from the on-shell conditions Eq. (3.12)

$$\left[\frac{1 + \mathcal{Y}}{2}, \sqrt{\frac{1 + \mathcal{K}/2m_Q}{1 - \mathcal{K}/2m_Q}}\right] = -\frac{\mathcal{K}}{2m_Q} \sqrt{\frac{1 + \mathcal{K}/2m_Q}{1 - \mathcal{K}/2m_Q}}, \quad (3.26)$$

and

$$\sqrt{\frac{1 + \mathcal{K}/2m_Q}{1 - \mathcal{K}/2m_Q}} \left(\frac{1 + \mathcal{Y}}{2}\right) P_{v,h} = \left(\frac{1 + \mathcal{Y}}{2} + \frac{\mathcal{K}}{2m_Q}\right) \sqrt{\frac{1 + \mathcal{K}/2m_Q}{1 - \mathcal{K}/2m_Q}} P_{v,h}, \quad (3.27)$$

to derive

$$\hat{P}_{\bar{q}} = \frac{\Lambda_M}{m_Q} \left(\frac{1 + \mathcal{Y}}{2}\right) \sqrt{\frac{1 + \mathcal{K}/2m_Q}{1 - \mathcal{K}/2m_Q}} P_{v,h}. \quad (3.28)$$

Combining \hat{P}_Q and $\hat{P}_{\bar{q}}$, we get the expression

$$\hat{P} = \left(1 + \frac{\Lambda_M}{m_Q} \left(\frac{1+\mathcal{Y}}{2} \right) \right) \sqrt{\frac{1+\not{k}/2m_Q}{1-\not{k}/2m_Q}} \left(\frac{1+\mathcal{Y}}{2} \right) P_v. \quad (3.29)$$

The same derivation can be made for the vector meson $\hat{P}^{*\mu}$. Finally, we derive the all order mass correction form

$$\hat{M} = \left(1 + \frac{\Lambda_M}{m_Q} \left(\frac{1+\mathcal{Y}}{2} \right) \right) \sqrt{\frac{1+\not{k}/2m_Q}{1-\not{k}/2m_Q}} M_v. \quad (3.30)$$

where M_v is defined as

$$M_v = \frac{1+\mathcal{Y}}{2} (-P_v \gamma_5 + P_v^{*\mu} \gamma_\mu). \quad (3.31)$$

With the above result, we can transform the expression Eq. (3.30) into the coordinate space to obtain the mass correction fields to all order in $1/m_Q$ expansion

$$\hat{M}(x) = \left(1 + \frac{\Lambda_M}{m_Q} \left(\frac{1+\mathcal{Y}}{2} \right) \right) \sqrt{\frac{1+i\not{d}/2m_Q}{1-i\not{d}/2m_Q}} M_v(x), \quad (3.32)$$

and

$$M_v(x) = \frac{1+\mathcal{Y}}{2} (-P_v(x) \gamma_5 + P_v^{*\mu}(x) \gamma_\mu), \quad (3.33)$$

where the residual momentum vector k^μ has been replaced by the covariant derivative id^μ defined in Eq. (3.2).

IV. Mass correction of heavy baryons with arbitrary spin

In this section, we will generalize the projection operator method developed in previous sections for heavy baryons with arbitrary spin, which participate in multiple soft pion emissions. Since the spin interactions between the heavy quark degrees of freedom and the light brown muck of the heavy baryons are of order $1/m_Q$, the total spin J can be written as a sum of the spin j of the light brown muck and the spin S_Q of the heavy quark as $J = j \pm S_Q$. At low energies, the heavy quark spin can only be little flipped by interactions. This makes us approximately let $S_Q = 1/2$. The heavy

baryon fields with spin $J = j \pm \frac{1}{2}$ are defined as [19]

$$\begin{aligned} J = j + \frac{1}{2}: & B^{*\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}(x), \\ J = j - \frac{1}{2}: & \sum_{i=1}^j \sqrt{\frac{1}{j(2j+1)}} \left(\gamma^{\mu_i} + \frac{id^{\mu_i}}{m_{B_j}} \right) \gamma_5 B^{\mu_1 \dots \hat{\mu}_i \dots \mu_j}(x), \end{aligned} \quad (4.1)$$

where $\hat{\mu}_i$ means that the index μ_i has been subtracted from the superscript of $B^{\mu_1 \dots \mu_j}$. The mass m_{B_j} denotes the heavy baryon mass with light brown muck spin equal to j . Due to the spin interactions between the heavy quark and the light brown muck being suppressed by $1/m_Q$, the

heavy baryons with quantum number $J = j \pm 1/2$ are degenerate in the infinite mass limit $m_Q \rightarrow \infty$. Similar to the heavy meson, we introduce the heavy baryon superfield as [20]

$$S^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}(x) = B^{*\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}(x) + \sum_{i=1}^j \sqrt{\frac{1}{j(2j+1)}} \left(\gamma^{\mu_i} + \frac{id^{\mu_i}}{m_{B_j}} \right) \gamma_5 B^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}(x), \quad (4.2)$$

To derive the mass correction, we firstly define the correction heavy baryon fields as

$$\hat{B}^{*\mu_1 \cdots \mu_j}(x) = e^{im_{B_j} v \cdot x} B^{*\mu_1 \cdots \mu_j}(x), \quad (4.3)$$

and

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j \sqrt{\frac{1}{i(2j+1)}} \left(\gamma^{\mu_i} + v^{\mu_i} + \frac{id^{\mu_i}}{m_{B_j}} \right) \gamma_5 \hat{B}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}(x) \\ &= \sum_{i=1}^j \sqrt{\frac{1}{i(2j+1)}} \left(\gamma^{\mu_i} + v^{\mu_i} + \frac{id^{\mu_i}}{m_{B_j}} \right) \gamma_5 e^{im_{B_j} v \cdot x} B^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

The superfield is defined accordingly as

$$\hat{S}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}(x) = \hat{B}^{*\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}(x) + \sum_{i=1}^j \sqrt{\frac{1}{j(2j+1)}} \left(\gamma^{\mu_i} + v^{\mu_i} + \frac{id^{\mu_i}}{m_{B_j}} \right) \gamma_5 \hat{B}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}(x). \quad (4.5)$$

To define the effective fields for heavy baryons, we firstly separate the heavy baryon mass parameter m_{B_j} into $m_Q + \Lambda_{B_j}$ and apply the limit $m_{B_j}, m_Q \rightarrow \infty$ by keeping Λ_{B_j} unchanged to obtain

$$B_v^{*\mu_1 \cdots \mu_j}(x) = \lim_{m_Q \rightarrow \infty} \hat{B}^{*\mu_1 \cdots \mu_j}(x), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^j \sqrt{\frac{1}{j(2j+1)}} (\gamma^{\mu_i} + v^{\mu_i}) \gamma_5 B_v^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}(x) \\ &= \sum_{i=1}^j \sqrt{\frac{1}{j(2j+1)}} (\gamma^{\mu_i} + v^{\mu_i}) \gamma_5 \lim_{m_Q \rightarrow \infty} \hat{B}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}(x), \end{aligned} \quad (4.7)$$

and

$$\begin{aligned} S_v^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}(x) &= \lim_{m_Q \rightarrow \infty} \hat{S}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}(x) \\ &= B_v^{*\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j}(x) + \sum_{i=1}^j \sqrt{\frac{1}{j(2j+1)}} (\gamma^{\mu_i} + v^{\mu_i}) \gamma_5 B_v^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}(x). \end{aligned} \quad (4.8)$$

The above definitions for the effective heavy baryon fields are consistent with those defined in [20].

The remaining task is to derive the mass correction form. Under the projection operator method, we first transform the baryon fields into their momentum space representations. By applying the heavy quark projection operator

$$\left(\frac{1 + \not{v}}{2} + \frac{\not{K}}{2m_Q} \right) \quad (4.9)$$

on the baryon fields $\hat{B}^{*\mu_1 \cdots \mu_j}$ and $\hat{B}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}$ to project out their heavy quark degrees of freedom

$$\hat{B}_Q^{*\mu_1 \cdots \mu_j} \equiv \left(\frac{1+\mathcal{Y}}{2} + \frac{\mathcal{K}}{2m_Q} \right) \hat{B}^{*\mu_1 \cdots \mu_j}, \quad (4.10)$$

and

$$\hat{B}_Q^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \equiv \left(\frac{1+\mathcal{Y}}{2} + \frac{\mathcal{K}}{2m_Q} \right) \hat{B}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}. \quad (4.11)$$

Following the same procedure performed in Sec. III to derive the relation between the heavy quark degrees of freedom of the heavy baryon fields and those of the effective heavy baryon fields, we then arrive at

$$\hat{B}_Q^{*\mu_1 \cdots \mu_j} = \sqrt{\frac{1+\mathcal{K}/2m_Q}{1-\mathcal{K}/2m_Q}} B_{v,h}^{*\mu_1 \cdots \mu_j}, \quad (4.12)$$

$$\hat{B}_Q^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} = \sqrt{\frac{1+\mathcal{K}/2m_Q}{1-\mathcal{K}/2m_Q}} B_{v,h}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}, \quad (4.13)$$

where

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_{v,h}^{*\mu_1 \cdots \mu_j} \\ \hat{B}_{v,h}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \end{array} \right\} = \frac{1+\mathcal{Y}}{2} \times \left\{ \begin{array}{l} B_v^{*\mu_1 \cdots \mu_j} \\ B_v^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \end{array} \right\}. \quad (4.14)$$

It is then followed by using Eq. (3.26) to rewrite the right hand side of (4.12) and (4.13) into the following form

$$\hat{B}_Q^{*\mu_1 \cdots \mu_j} = \left(\frac{1+\mathcal{Y}}{2} + \frac{\mathcal{K}}{2m_Q} \right) \sqrt{\frac{1+\mathcal{K}/2m_Q}{1-\mathcal{K}/2m_Q}} B_v^{*\mu_1 \cdots \mu_j}, \quad (4.15)$$

$$\hat{B}_Q^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} = \left(\frac{1+\mathcal{Y}}{2} + \frac{\mathcal{K}}{2m_Q} \right) \sqrt{\frac{1+\mathcal{K}/2m_Q}{1-\mathcal{K}/2m_Q}} B_v^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}, \quad (4.16)$$

where the heavy quark projection operator (4.9) on the both sides of the above two equations can be cancelled out. Unlike the derivation of mass correction froms made for the heavy meson, we do not need to consider an identity similar to Eq. (3.27) for relevant fields, here we means the effective heavy baryon fields $B_v^{*\mu_1 \cdots \mu_j}$ and $B_v^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}$, to derive light degrees of freedom parts.

Partial mass corrections associated with the light degrees of freedom are retained in the Lagrangian density for the heavy baryon fields and some have already been included in the above derivation. Therefore, we obtain the result as

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}^{*\mu_1 \cdots \mu_j} \\ \hat{B}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{1+\mathcal{K}/2m_Q}{1-\mathcal{K}/2m_Q}} \times \left\{ \begin{array}{l} B_v^{*\mu_1 \cdots \mu_j} \\ B_v^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \end{array} \right\}. \quad (4.17)$$

For $J = j \pm \frac{1}{2}$ baryons, the superfield becomes

$$\hat{S}^{\mu_1 \cdots \mu_j}(x) = \left(\sqrt{\frac{1+i\not{d}}{2m_Q}} B_v^{*\mu_1 \cdots \mu_j}(x) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^j \sqrt{\frac{1}{j(2j+1)}} \left(\gamma^{\mu_i} + v^{\mu_i} + \frac{i\not{d}^{\mu_i}}{m_{M_{B_j}}} \right) \gamma_5 \sqrt{\frac{1+i\not{d}}{2m_Q}} B_v^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j}(x) \right). \quad (4.18)$$

We have transformed the results in momentum space into their coordinate space representations.

V. Mass correction of heavy mesons with arbitrary spin

In this section, we investigate the mass corrections for heavy mesons with arbitrary spin, which can involve in multiple soft pion emission processes. Due to the spin interactions between the heavy quark and the light brown muck being suppressed by $1/m_Q$, the heavy mesons with quantum number $J^P = (l^-, (l+1)^-)$ or $J^P = ((l-1)^+, l^+)$ are degenerate in the infinite mass limit $m_Q \rightarrow \infty$. Similar to the heavy meson case in Sec. III, we first define compact heavy meson fields

$$J^P = (l^-, (l+1)^-)$$

$$M^{(-)\mu_1 \cdots \mu_j}(x) \\ = \left(\frac{m_{M_j} + i\not{d}}{2m_Q} \right) \left(\sqrt{\frac{2l+1}{2l+2}} P^{v_1 \cdots v_j}(x) \gamma_5 \left[\delta_{v_1 \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \mu_j} - \frac{1}{2j+1} \sum_{i=1}^l \gamma_{v_i} \left(\gamma^{\mu_i} - \frac{i\bar{d}^{\mu_i}}{m_{M_j}} \right) \delta_{v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \right] \right. \\ \left. + P^{*\mu_1 \cdots \mu_{j+1}}(x) \gamma_{\mu_{j+1}} \right), \quad (5.1)$$

$$J^P = ((l-1)^+, l^+)$$

$$M^{(+)\mu_1 \cdots \mu_j}(x) \\ = \left(\frac{m_{M_j} + i\not{d}}{2m_Q} \right) \left(\sqrt{\frac{2l+1}{2l+2}} S^{v_1 \cdots v_j}(x) \left[\delta_{v_1 \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \mu_j} - \frac{1}{2j+1} \sum_{i=1}^l \gamma_{v_i} \left(\gamma^{\mu_i} + \frac{i\bar{d}^{\mu_i}}{m_{M_j}} \right) \delta_{v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \right] \right. \\ \left. + S^{*\mu_1 \cdots \mu_{j+1}}(x) \gamma_5 \gamma_{\mu_{j+1}} \right), \quad (5.2)$$

where the total spin j of the light brown muck is separated into the orbital part, l , and the intrinsic spin part, $s=1/2$, of the light quark. Similarly, we redefine these heavy meson fields to remove their large phase factors to make them appropriate for describing the low energy processes

$$M^{(-)\mu_1 \cdots \mu_j}(x) = e^{im_{M_j} v \cdot x} M^{(-)\mu_1 \cdots \mu_j}(x) \\ = \left(\frac{1+\not{v}}{2} + \frac{i\not{d}}{2m_Q} \frac{\Lambda_{M_j}}{2m_Q} \frac{1+\not{v}}{2} \right) \\ \times \left(\sqrt{\frac{2l+1}{2l+2}} \hat{P}^{v_1 \cdots v_j}(x) \gamma_5 \left[\delta_{v_1 \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \mu_j} - \frac{1}{2j+1} \sum_{i=1}^l \gamma_{v_i} \left(\gamma^{\mu_i} - v^{\mu_i} - \frac{i\bar{d}^{\mu_i}}{m_{M_j}} \right) \delta_{v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \right] + \hat{P}^{*\mu_1 \cdots \mu_{j+1}}(x) \gamma_{\mu_{j+1}} \right), \quad (5.3)$$

and

$$\begin{aligned}
 M^{(+)\mu_1 \cdots \mu_j}(x) &= e^{im_{M_j} v \cdot x} M^{(+)\mu_1 \cdots \mu_j}(x) \\
 &= \left(\frac{1 + \not{v}}{2} + \frac{i \not{d}}{2m_Q} \frac{\Lambda_{M_j}}{2m_Q} \frac{1 + \not{v}}{2} \right) \\
 &\times \left(\sqrt{\frac{2l+1}{2l+2}} \hat{S}^{v_1 \cdots v_j}(x) \left[\delta_{v_1 \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \mu_j} - \frac{1}{2j+1} \sum_{i=1}^l \gamma_{v_i} \left(\gamma^{\mu_i} + v^{\mu_i} + \frac{i \vec{d}^{\mu_i}}{m_{M_j}} \right) \delta_{v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \right] + \hat{S}^{*\mu_1 \cdots \mu_{j+1}}(x) \gamma_5 \gamma_{\mu_{j+1}} \right),
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

where the redefined fields with a capital hat are defined as those original fields multiplied with a phase factor $\exp(im_{M_j} v \cdot x)$.

Following similar procedures as used for the derivations made in previous sections, we first transform the relevant fields into their momentum representations, and follow to derive the mass correction form for the heavy and light degrees of freedom of heavy meson fields, respectively. After combining the heavy and light degrees of freedom parts, we can easily arrive at the mass correction form for the compact heavy meson fields as

$$\begin{aligned}
 M^{(-)\mu_1 \cdots \mu_j}(x) &= \left(1 + \frac{\Lambda_{M_j}}{2m_Q} \frac{1 + \not{v}}{2} \right) \sqrt{\frac{1 + i \not{d} / 2m_Q}{1 - i \not{d} / 2m_Q}} \left(\frac{1 + \not{v}}{2} \right) \\
 &\times \left(\sqrt{\frac{2l+1}{2l+2}} P_v^{v_1 \cdots v_j}(x) \gamma_5 \left[\delta_{v_1 \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \mu_j} - \frac{1}{2j+1} \sum_{i=1}^l \gamma_{v_i} \left(\gamma^{\mu_i} - \frac{i \vec{d}^{\mu_i}}{m_{M_j}} \right) \delta_{v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \right] + P_v^{*\mu_1 \cdots \mu_{j+1}}(x) \gamma_{\mu_{j+1}} \right),
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

and

$$\begin{aligned}
 M^{(+)\mu_1 \cdots \mu_j}(x) &= \left(1 + \frac{\Lambda_{M_j}}{2m_Q} \frac{1 + \not{v}}{2} \right) \sqrt{\frac{1 + i \not{d} / 2m_Q}{1 - i \not{d} / 2m_Q}} \left(\frac{1 + \not{v}}{2} \right) \\
 &\times \left(\sqrt{\frac{2l+1}{2l+2}} S_v^{v_1 \cdots v_j}(x) \left[\delta_{v_1 \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \mu_j} - \frac{1}{2j+1} \sum_{i=1}^l \gamma_{v_i} \left(\gamma^{\mu_i} - \frac{i \vec{d}^{\mu_i}}{m_{M_j}} \right) \delta_{v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_j}^{\mu_1 \cdots \hat{\mu}_i \cdots \mu_j} \right] + S_v^{*\mu_1 \cdots \mu_{j+1}}(x) \gamma_5 \gamma_{\mu_{j+1}} \right).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Note that we have written the results in the coordinate space.

VI Conclusions

We have derived the mass correction forms for heavy hadrons with arbitrary spin by using the projection operator method. The mass correction forms can be used to the studies of the heavy hadron decay processes with multiple soft pion emissions [21, 22]. For example, the transition processes $B^{(*)} \rightarrow D^{(*)} \pi, D^{(*)} \pi \pi, \dots$ involve many soft pions in the transition between heavy mesons with different spin. The decay amplitudes for these processes can be expressed in terms of universal transition form factors and the mass correctional terms, which can be systematically calculated by means of the correction forms for the relevant heavy meson fields derived in this paper. In addition, the mass correction forms for heavy hadrons with arbitrary spin can be directly

applied to calculate the mass splitting in the heavy hadron mass spectra. As a concrete example, we apply the mass correction forms to evaluate the mass corrections to the Bjorken sum rule. By using the quark-hadron duality and the heavy quark infinite mass limit, one can derive the following sum rule [23]

$$\begin{aligned} & \sum_{s,s'} \langle h(v,s) | \bar{h}_v \Gamma h_{v'} | h(v',s') \rangle \langle h(v',s') | \bar{h}_{v'} \Gamma h_v | h(v,s) \rangle \\ & = \sum_{n,s'} \langle \Psi(v) | \bar{h}_v \Gamma h_{v'} | X^n(v',s') \rangle \langle X^n(v',s') | \bar{h}_{v'} \Gamma h_v | \Psi(v) \rangle, \end{aligned} \quad (6.1)$$

where $|h(v,s)\rangle$ denotes a effective heavy quark state with the velocity quantum number v and the spin quantum number s , $\bar{h}_v \Gamma h_{v'}$ is the effective heavy quark current with $\Gamma = \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, i\sigma^{\mu\nu}$, $|\Psi(v)\rangle$ is the lowest spin heavy baryon state, and $|X^n(v,s)\rangle$ are the intermediate baryon states with quantum numbers v and s . The summations are taken over the spin quantum number s , and the baryon index number n , which is used to specify the heavy baryon state. To find the mass corrections to the above sum rule, we propose to define the following sum rule

$$\begin{aligned} & \sum_{s,s'} \langle h(v,s) | \bar{H}_v \Gamma H_{v'} | h(v',s') \rangle \langle h(v',s') | \bar{H}_{v'} \Gamma H_v | h(v,s) \rangle \\ & = \sum_{n,s'} \langle \Psi(v) | \bar{H}_v \Gamma H_{v'} | X^n(v',s') \rangle \langle X^n(v',s') | \bar{H}_{v'} \Gamma H_v | \Psi(v) \rangle, \end{aligned} \quad (6.2)$$

where $H_v(x)$ is the mass correction field defined in Eq. (2.1) has been used. To specify the velocity, we have added the velocity subscript v to the mass correction field $H(x)$. For simplicity, we have omitted the coordinate dependence of the fields. By substituting Eq. (2.7) for the mass correction fields to the currents in the left hand side of Eq. (6.2), we can expand the left hand side into a series of terms of different order of m_Q . For the right hand side of Eq. (6.2), we employ the following matching condition similar to one used in [20]

$$\bar{H}_{v'} \Gamma H_v \rightarrow C_{B,X}(v \cdot v') \bar{B}_v \Gamma_{v,v'} X_{v'}^n, \quad (6.3)$$

where $C_{B,X}(v \cdot v')$ are the transition form factors for $B_v \rightarrow X_{v'}^n$, $\Gamma_{v,v'}$ are the effective vertex functions of v , v' , and Dirac matrix $\Gamma = \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, i\sigma^{\mu\nu}$, and B_v and $X_{v'}^n$ are those heavy baryon mass correction fields defined in Sec. IV. By substituting Eq. (4.18), we can expand the current $\bar{B}_v \Gamma_{v,v'} X_{v'}^n$ into a mass expansion series. By comparing both sides of Eq. (6.2) for each order of heavy quark mass in the expansion series, we can derive a series of identities which are similar to Eq. (6.1). Because these applications require further investigations and the related analysis is very tedious, which is not appropriated to be given here, we plan for these interesting phenomenological applications in our future publications.

Acknowledgments

The main content of this paper is revised from the paper hep-ph/9510240. The author thank the incorporation with C.E. Lee in the period of working on the paper hep-ph/9510240. This work was supported in part by the National Science Council of R.O.C. under Grant No. NSC95-2112-M142-001- and National Taichung University.

References

- [1] Nathan Isgur and Mark B. Wise. *Weak transition form-factors between heavy mesons.* *Phys. Lett.*, B237:527, 1990.

- [2] Nathan Isgur and Mark B. Wise. *Weak decays of heavy mesons in the static quark approximation*. *Phys. Lett.*, B232:113, 1989.
- [3] Howard Georgi. *An effective field theory for heavy quarks at low-energies*. *Phys. Lett.*, B240:447–450, 1990.
- [4] Benjamin Grinstein. *The static quark effective theory*. *Nucl. Phys.*, B339:253–268, 1990.
- [5] Adam F. Falk, Howard Georgi, Benjamin Grinstein, and Mark B. Wise. *Heavy meson form-factors from QCD*. *Nucl. Phys.*, B343:1–13, 1990.
- [6] Michael E. Luke and Aneesh V. Manohar. *Reparametrization invariance constraints on heavy particle effective field theories*. *Phys. Lett.*, B286:348–354, 1992.
- [7] Yu-Qi Chen. *On the reparametrization invariance in heavy quark effective theory*. *Phys. Lett.*, B317:421–427, 1993.
- [8] Wolfgang Kilian and Thorsten Ohl. *Renormalization of heavy quark effective field theory: Quantum action principles and equations of motion*. *Phys. Rev.*, D50:4649–4656, 1994.
- [9] Adam F. Falk, Benjamin Grinstein, and Michael E. Luke. *Leading mass corrections to the heavy quark effective theory*. *Nucl. Phys.*, B357:185–207, 1991.
- [10] Michael E. Luke. *Effects of subleading operators in the heavy quark effective theory*. *Phys. Lett.*, B252:447–455, 1990.
- [11] Thomas Mannel, Winston Roberts, and Zbigniew Ryzak. *A derivation of the heavy quark effective Lagrangian from QCD*. *Nucl. Phys.*, B368:204–220, 1992.
- [12] Tsung-Wen Yeh. *Revisited reparameterization invariance of HQET*. *Chin. J. Phys.*, 41(4):384, 2003.
- [13] Ashok K. Das. *On the higher order corrections to heavy quark effective theory*. *Mod. Phys. Lett.*, A9:341–354, 1994.
- [14] Elizabeth Jenkins and Aneesh V. Manohar. *Baryon chiral perturbation theory using a heavy fermion Lagrangian*. *Phys. Lett.*, B255:558–562, 1991.
- [15] Gustavo Burdman and John F. Donoghue. *Union of chiral and heavy quark symmetries*. *Phys. Lett.*, B280:287–291, 1992.
- [16] Peter L. Cho and Howard Georgi. *Electromagnetic interactions in heavy hadron chiral theory*. *Phys. Lett.*, B296:408–414, 1992.
- [17] Tung-Mow Yan et al. *Heavy quark symmetry and chiral dynamics*. *Phys. Rev.*, D46:1148–1164, 1992.
- [18] Tsung-Wen Yeh and Chien-er Lee. *On the mass correction of heavy meson effective theory*. *unpublished*, 1995.
- [19] H. Umezawa. *Quantum field theory*. North-Holland, Amsterdam, 1956.
- [20] Adam F. Falk. *Hadrons of arbitrary spin in the heavy quark effective theory*. *Nucl. Phys.*, B378:79–94, 1992.
- [21] Hai-Yang Cheng et al. *Corrections to chiral dynamics of heavy hadrons. 1. $1/m$ correction*. *Phys. Rev.*, D49:2490–2507, 1994.
- [22] Noriaki Kitazawa and Takeshi Kurimoto. *Heavy meson effective theory with $1/m_Q$ correction*. *Phys. Lett.*, B323:65–70, 1994.
- [23] J. D. Bjorken, I. Dunietz and J. Taron. *Inclusive semileptonic decays of bottom baryons and mesons into charmed and uncharmed final states: The case of infinitely heavy b and c quarks*. *Nucl. Phys.*, B 371:111–140, 1992.

建構高中物理解題教學模式之研究

A Research to Construct a Teaching Model of Physics Problem Solving for Senior High School Students

陳章正*

Jang-Jenq Chern

江新合**

Shing-Ho Chiang

(收件日期 96 年 4 月 12 日；接受日期 96 年 7 月 31 日)

摘要

本研究以行動研究的方法建構「高中物理解題教學模式」。本模式根據本研究提出的解題教學五大階層：「理解題意 (Understanding)」、「提取概念 (Retrieve)」、「選擇概念 (Option)」、「反思 (Reflection)」、及「應用 (Application)」命名為 URORA。

研究對象為高雄市某高中二年級學生，實驗組 112 人，對照組 106 人。以準實驗研究的方法比較實施 URORA 與否對物理解題學習成效的差異性。

行動研究的歷程共分為四個階段：第一階段為「建構解題教學階層」，藉由文獻探討獲得解題教學模式的五大階層，但發現學生應用於物理解題，仍有不足之處；第二階段為「建構解題教學元素」，增加解題元素作為模式的橫座標和解題鷹架，但發現學生仍缺乏解題的策略；第三階段為「精煉解題教學模式」，發展解題教學策略，並完成精煉的解題教學模式；第四階段為「評鑑解題教學模式」，藉由解題與教學成效的提升，評鑑模式的有效性。

高中物理解題教學模式可引導學生依循階層性實施解題，促進解題成效，故解題教學模式亦可視為學生的「解題模式」。此外，蒐集學生成績作為前後測分析的資料，發現採用 URORA 教學班級的物理成績優於未採用的對照組，建議教師採用具有解題階層、解題元素的「高中物理解題教學模式」實施教學，而學生則用來輔助解題。

關鍵詞：高中物理、解題教學模式

* 高雄市立左營高級中學

** 國立高雄師範大學科學教育研究所兼任教授

Abstract

The purposes of this action research were to construct a teaching model of physics problem-solving for senior high school students. The model named URORA after the acronym of five physics problem-solving stages developed in this study, i.e. Understanding, Retrieve, Option, Reflection, and Application.

The participants in this study were 11th-grade students enrolled in a Kaohsiung municipal senior high school. For comparing their achievements, 112 participants involved in the experimental group who were taught to solve physics problem with URORA, and 106 participants as the control group who studied under the traditional instruction.

The action research proceeded as four phases. First phase, constructing problem-solving instruction stages, established 5 stages of URORA through literature review, but it was not concrete enough for students' applications. Second phase, adding elements of problem-solving instruction, scaffolding students' problem-solving in the classroom, nevertheless, students seemed to lack of problem-solving strategies still. Third phase, elaborating the teaching model of problem-solving, developed the strategies and elaborated the model to assist students' work. Fourth phase, evaluating the teaching model of problem-solving, assessed the effects of the model if students improved their problem-solving abilities.

The results show that URORA is not only a teaching model for teachers but also a problem-solving model for students, which may improve students' abilities of physics problem-solving efficiently.

Key words: Senior high school physics, Teaching model of problem solving

壹、前言

從歷年大學入學考試的成績來看，高中學生對物理的「解題」存在許多困難，不只要看懂題意，還必須運用正確的概念及數學技巧，才能順利解題。許多研究都發現學生開始解題時不諳方法，且缺乏有系統的策略來引導他們的解題行動 (Reif, Larkin & Brackett, 1976; Schoenfeld, 1989)，形成解題困難，陳章正與江新合 (2006) 針對高中學生的物理解題進行研究，發現共有 20 項困難，可依據解題階層分為理解題意、提取概念、選擇概念、反思、應用等五大類。

Lippert (1988) 的解題理論認為發展「後設認知」的目標層次，高於「陳述性知識」及「程序性知識」，Flavell (1979), Duit, Treagust (2003), Bruning, Schraw, Ronning (1995) 都認為運用後設認知的觀點，對學習的歷程進行反思和監控，以朝向目標發展，會影響學習成效，Yager (1991) 也認為學習是主動學習且要求學生去建構他們個人的基模，來同化新的概念。

Treagust, Chittle, Mamiala (2002) 認為「模式 (Model)」是科學學習過程中不可或缺的一部份，也是科學教室中經常使用的教學方法；Olson, Cox-Petersen, McComas (2001) 也引用 Bandura (1977) 與 Lawson, Abraham, Renner (1989) 的文獻，認為模式化是學習的最佳方法。

此外，教師實施行動研究，可以精緻化教學反思、應用理論與研究結果的過程、建構教育專業實踐理論的過程、以及自求發展的行動歷程 (林生傳，2000)，逐步改進教學方法，以促進教學成效；Noffke (1994) 指出行動研究常被視為專業或個人發展的領域。

綜上所述，本研究將藉由文獻的探討，廣泛蒐集後設認知與物理解題的相關資料，以行動研究的方法，在教學的現場逐步形成解題的教學模式，期望提升高中物理解題教學的成效。因此，本研究的目的是在以行動研究建構高中物理解題的教學模式，問題則為：(一) 高中物理解題的教學模式為何？(二) 高中物理解題教學模式的成效為何？

貳、研究方法

本研究旨在以行動研究的方法建構「高中物理解題教學模式」，該模式以各解題階層，即「理解題意 (Understanding)」、「提取概念 (Retrieve)」、「選擇概念 (Option)」、「反思 (Reflection)」、及「應用 (Application)」的英文字首之集合簡稱為「URORA」，藉以協助學生解題。建構解題教學模式期間，蒐集文獻及學生解題的資料，發展「解題路徑圖」，用以表徵學生、專家教師的解題歷程，及教師解題教學的過程，作為解題教學的省思。最終將解題教學模式轉化為「高中物理解題檢核表」，具體提供學生解題與教師教學的參考。

一、研究對象

本研究的對象分爲行動研究、準實驗研究、個案研究的對象三種，並整理如表 1：

(一) 行動研究的對象

以高雄市某高級中學二年級第三類組三個班級的學生，共 112 人爲行動研究的對象，其中男生 64 人、女生 48 人，可依物理成績（期末考的物理成績）概分爲高、中、低的程度（按成績之前 27% 爲高程度，後 27% 爲低程度，其餘爲中程度），期望研究結果獲得普適性的價值。

(二) 準實驗研究的對象

除了以上述行動研究的對象爲實驗組，另外選取未實施解題教學模式的 106 位高二自然組學生爲對照組，作爲比較實施解題教學模式的成效。

(三) 個案研究的對象

選擇經常利用課餘時間與教師（即研究者）討論問題的 8 位學生，做爲「解題教學模式評鑑階段」（第四階段）應用 URORA 的研究對象。

表 1 研究對象整理表

各類研究對象	男生	女生	小計
1. 行動研究的對象（同準實驗研究實驗組的對象）	64	48	112
2. 準實驗研究對照組的對象	78	28	106
3. 個案研究的對象	3	5	8
合 計	145	81	226

二、研究工具

在建構「高中物理解題教學模式」的期間，共計用到下列工具：

(一) 高中學生物理解題困難回饋單

「建構解題教學階層」（第一階段）期間，爲求了解學生物理解題的困難，在物理解題教學之後，以研究者自編之開放式問卷調查學生的困難，經過分析與整理，獲得學生的解題困難共 20 項，作爲解題模式建構的起點（陳章正、江新合，2006）。

(二) 高中物理解題路徑圖

「建構解題教學元素」（第二階段）的計畫步驟中，規劃解題概念與解題行動，完成初步的解題教學模式，爲求以此解題教學模式表徵學生的解題歷程或教師解題教學的過程，研究者自行發展「高中物理解題路徑圖」（如圖 1），成爲觀察解題或解題教學歷程的工具。

繪製方法爲根據解題原案的編碼，以□代表學生的解題活動、以○代表教師的解題

活動，並以「？」和「：」分別代表教師（或學生）在解題歷程中的提問和回答，成為繪製解題路徑的節點，再用射線依序連結各節點，成為包括二軸（橫向）、五大階層（縱向）的解題路徑圖。

（三）高中物理學習成效試卷

為比較使用 URORA 教學與否的差異性，以研究者自編之「高中物理學習成效試卷」施測，藉由高雄市某高中二年級第四次月考的機會實施，試題範圍：萬有引力、功與動能兩大單元，試題分為兩大部分：第一部份為 16 格單選題及 4 格填充題、第二部份為 2 題的物理解題（第一題以克卜勒第三定律為內容、第二題以功的解題為內容）。

採用折半信度的方法，並經斯布 (Spearman-Brown) 校正，獲得奇數題與偶數題成績的相關值 $r=0.84$ ，屬高度相關。此外，藉由學生與專家教師對試題的回饋意見可知：本試卷具備表面效度與專家效度；命題時，藉由雙向細目表使題目在課程概念的縱軸及布魯姆認知層次的橫軸均勻分布，故具備一定的內容效度。

三、資料分析

資料有質性與量化二種，整理如下：

（一）物理解題困難的回饋資料分析

學生在解題教學後填寫回饋單，以認知、情意、技能的困難作為假設，重複搜尋學生的回饋資料，再以五大解題階層作為整理的依據，獲得學生的解題困難共 20 項，5 大類型（陳章正、江新合，2006）。

（二）解題路徑圖的資料分析

在解題教學之後，依據學生及專家教師解題歷程的「原案」繪製若干「解題路徑圖」，藉以觀察解題歷程的差異。編碼的方式以英文字母代表解題元素，而以阿拉伯數字代表解題階層，例如 C1 代表解題原案的意義屬於解題概念（C）中的第一階層（1）。

（三）學習成效的資料分析

本研究以學生的高一物理學年成績作為前測的資料，以高二上學期期末考的物理成績（含總成績與物理解題的成績二種）為後測資料，事先邀請四位專家教師討論，使評分的標準一致，物理解題的部分共二題，各以 5 分為滿分，判準如下表 2。

表 2 物理解題評分的判準

解題判準	得分
1. 理解題意、提取概念、選擇概念表達完整。	5
2. 理解題意、提取概念、選擇概念「大部分」表達完整。	4
3. 理解題意、提取概念、選擇概念「部分」表達完整。	3
4. 理解題意、提取概念、選擇概念「少部分」表達完整。	2
5. 理解題意、提取概念、選擇概念「完全」不能表達。	1
6. 空白	0

學習成效獲得的資料計有：學生的基本資料、學生物理的總成績（包含二部份試題的成績）、學生物理解題的成績（僅含解題部分的成績），採用 t 考驗的方法獲得差異性。

四、研究的信效度

（一）編碼的信效度

本研究需要將學生、專家教師的解題歷程、及教師教學的過程，藉由編碼的方式繪製成「解題路徑圖」，並以三位專家教師認可的「解題概念（例如：C1）」與「解題行動（例如：A2）」編碼作為繪製「解題路徑圖」的最後結果，且三位專家教師意見不同時，經由討論的方式獲得共識。

（二）專家教師對物理解題的評分一致性高

三位專家教師對於物理解題的評分，經過 PEARSON 相關分析之後，發現係數很高，均超過 0.95（如表 3），從 Lind、Marchal、Wathen (2006) 在他們合寫的基礎統計學教科書中，將相關係數以強度作區別，表 3 中的相關係數均屬於很強的正相關，表示三位專家教師對物理解題的評分一致性很高，提高本研究的信度。

表 3 專家教師對物理解題評分一致性相關係數比較表

組別	人數	平均分數	標準差	相關係數 r
甲師	218 人	1.11 分	0.986	0.963
乙師	218 人	1.09 分	0.958	
甲師	218 人	1.11 分	0.986	0.952
丙師	218 人	1.09 分	0.964	
乙師	218 人	1.09 分	0.958	0.964
丙師	218 人	1.09 分	0.964	
平均	218 人	1.097	0.969	0.960

參、行動研究的歷程

本研究旨在建構一個高中物理的解題教學模式，協助學生順利解題，其建構歷程概分為四階段，共費時約一年半（自 2005 年 9 月起至 2007 年 1 月止）。茲以行動研究的四個流程：計劃、行動、觀察、反省，並以螺旋狀的進程去建構解題教學模式，也就是教師針對初步構想作詳盡的計劃、繼而反覆的行動、不斷的觀察、客觀切實的反省，再反覆精煉出適當的解題教學模式 (DeLong, 2004, Kemmis & McTaggart, 2000)。茲分別敘述各階段的歷程如下：

第一階段 建構解題教學階層階段

研究者依據教學現場發現的問題，依據行動研究的四大流程，逐步改善物理解題的教學成效。

(一) 問題發現與教學計畫

研究者在中學物理教學時，發現學生物理成績低落的原因與「物理解題」是否順利有很大相關。因此，藉由「高中學生物理解題困難回饋單」為分析工具，再輔以訪談深入探討，希望獲得完整的學生解題困難。結果共獲得學生在物理解題的 20 項困難，且能依解題階層分為五大類（陳章正、江新合，2006）。

研究者為協助學生提升物理解題的能力，進行文獻的探討，發現解題的階層性是解題的重要指標。Comacho, Good (1989), Greenbowe (1983), Pramual (1990) 均認為解題時應循序漸進，成功的解題經常是按部就班的，而失敗的解題過程是混亂而沒有規則的。Polya (1945) 曾以其教學及解題的經驗，針對數學的解題發展了四個步驟的架構：1. 了解問題、2. 解題計畫、3. 執行計畫、4. 回顧與檢核 (looking back)，將啟發式教學法運用到數學的解題中，且接受如此步驟教學的學生，都顯示出相當的進步。此外，許多學者都認為解題的過程中，組織性與階層性均為解題成敗的重要指標 (Comacho & Good, 1989; Greenbowe, 1983; Hestenes, 1987; Larkin, 1983; Lippert, 1988; Pramual, 1990)。

但就學習的觀點，學生在獲得相關概念之後，仍舊需要連結概念的練習，或日常生活中物理現象的應用（施良方，2001）。Toulmin (1972) 認為知識傳播的共同屬性有學習、分享、應用與批判。又說：只有學會概念與公式的應用，才能真正理解科學的意義。蘇明俊 (2004) 也認為科學的學習過程中，「應用」是重要的階段。

綜上所述，參酌物理的學科特質及後設認知的觀點，初步形成以強調「階層性」的解題策略提供學生作為解題的依據，計有理解題意、提取概念、選擇概念、反思、應用等五大階層。

(二) 解題階層教學的行動歷程

研究者配合教學進度選擇教科書中「浮力」的例題，實施解題教學，教學中依據上述五大階層作示範解題，其歷程如下：

1. 「理解題意」的教學

由研究者向學生口頭解釋題意，提醒注意已知條件和關鍵詞，在黑板以示意圖說明，並引導學生把已知條件畫在圖上。

師：這題有哪些已知條件和關鍵詞？（老師畫出題目的圖形）

生：棒長 1.00M、有 0.40M 浸在水中，要求木棒的密度是多少？（學生注意到數字和問題）。繩子吊著，所以有張力。

2. 「提取概念」的教學

研究者向學生說明與解題相關的概念，採用師生口語互動的方式引導學生提取概念。

師：很好，受到這麼多力作用，木棒還能保持「平衡」，代表什麼意思？

生：就是不移動也不轉動，所以合力等於零，合力矩也等於零。

3. 「選擇概念」的教學

選擇概念時，可能用到先備概念，研究者引導學生寫出可以應用的相關公式，將題目上已知與未知的物理量代入公式中，並實施計算。

師：現在我們要如何求出浮力 (B) 和重力 (W) 呢？

浮力是排開同體積的液體重？ $\therefore B = V_{\text{液下}}^1 d_{\text{液}} g = 0.4A \times 1000g$

重力是 mg ，質量是體積乘以密度 $\therefore W = mg = V_{\text{木}} D_{\text{木}} g = 1.0AD_{\text{木}} g$

將 B 和 W 代入力矩相等的關係式中

$$0.4A \times 1000g \times 0.8 = 1.0AD_{\text{木}} g \times 0.5$$

$$\therefore D_{\text{木}} = 0.64 \times 10^3 \text{kg/m}^3 = 0.64 \text{g/cm}^3 \quad \text{這就是答案了}$$

4. 「反思」的教學

此階層引導學生回顧解題的歷程，並說出曾經用到的概念，及解題的技巧。

師：解這個題目有哪些是比較困難或是過去所不知道的概念？

生：均勻木棒力要作用在中間，還要以繩子懸掛的地方為支點。

生：還要假設木棒與液面的角度和木棒的截面積。

5. 「應用」的教學

研究者在完成例題教學後，指派教科書的習題作為學生應用的練習。

(三) 解題教學階層的觀察

行動研究中的觀察，發現三項待改進的問題：

1. 學生缺乏連結題意和概念的能力

學生在例題教學後，仍舊礙於不懂題意或受限於先備概念的提取，而無法順利解題。例如一位學生說：「我不懂棒球規則，根本不知道題目在說什麼。」又例如要利用力矩解浮力的題目，有學生問：「要怎樣算力矩呀？」可見概念理解為成功解題的關鍵之一。

2. 師生互動的情形與成績有關

約 30% 的同學時常參與師生互動的討論，踴躍回答課堂上教師的問題，其物理成績通常較高；50% 的同學很少參與課堂上的討論，或沒有討論的習慣，其物理成績則顯然較為低落；其餘 20% 的同學則介於此二者之間。

3. 學生缺乏執行解題行動的能力

在教學觀察後發現：約 25% 的同學整理筆記，並積極求解，而有大約 30% 的同學雖然整理筆記，但未積極求解，通常前者的解題技巧較佳。其餘學生即使在理解題意後，常只是等待老師解答，很少主動規劃解題的程序。

(四) 解題教學階層的反省

依據上述觀察的發現，研究者反思的結果如下：

1. 教師應提供解題基模作為學生學習的鷹架

從學生解題的困難來看，失敗的解題既然常困擾於題意的理解和概念的提取，因此，教師於例題教學時除示範解題外，更應協助學生將題目敘述轉換為物理形式的表徵，並加強題目與新舊概念間的聯結，藉以建立解題基模作為學生學習的鷹架 (Palincsar, 1986)。

2. 提供學生參與解題的機會

在教學觀察後發現：學生不願積極進行解題的行動，訪談後得知學生缺乏解題的信心。例如學生不能在問題的理解後，計畫解題的程序，因此，教學中教師仍應提供學生參與解題的機會，要求學生整理解題歷程的筆記，並於課堂教學時，增進學生回答問題與解題實作的意願。

基於上述的反省，解題階層可能對於物理解題仍有不足之處，因此，增加解題概念與行動作為橫向座標的解題元素，可能有助於學生完成各階層的解題歷程。

第二階段 建構解題教學元素階段

基於第一階段的反省結果，持續修正發展以橫座標為主的解題元素。

(一) 計畫

依據第一階段的反思，發現學生的解題歷程缺乏解題的概念與行動，因此，本階段計畫在每一解題階層增加概念與行動，形成解題模式的橫軸，且為結合縱軸的解題階層與橫軸的解題元素，因此以具有後設認知特質的 V 圖 (Gowin, 1981) 予以表示，形成「高中物理解題教學模式」，由於五大階層強調以理解題意 (Understanding)、提取概念 (Retrieve)、選擇概念 (Option)、反思 (Reflection)、應用 (Application) 為解題歷程，簡稱為「URORA」。

為了解學生解題的歷程是否與解題階層吻合，藉由解題教學模式轉化為圖像形式的「解題路徑圖」，希望具體表徵學生的解題歷程。

(二) 解題與教學的行動

1. 教師解題教學的歷程

研究者按照解題教學模式實施教學，並將上課的情形全程錄影，再以「解題路徑圖」表徵教師教學的歷程（如圖 1），研究者強調將「解題元素」融入「解題階層」教學的歷程敘述如下：

(1) 「理解題意」的教學

教師引導學生藉著連結舊經驗和物理概念以理解題意，例如：

師：(把題目先唸過一次) 這一題和我們生活中開水龍頭的經驗一樣，平順流出的水柱，其截面積會隨落下的高度而減小。

且以圖形表徵題意，並提醒單位的換算。

師：我們把題目上已知的訊息標示在圖形上，要注意題目用的是什麼單位？

(2) 「提取概念」的教學

教師以問題引導學生獲得相關的概念，以便規劃解題程序。例如：

師：應該怎麼求「水龍頭的流量速率」呢？

生：就是把截面積和流速乘起來。

師：所以這一題就是要求 $A_0V_0 = ?$ 或 $AV = ?$ (在黑板上寫下方程式)

學生能夠獲得「截面積」和「流速」的相關概念，有助於計畫獲得水龍頭「流量速率」的答案。

(3) 「選擇概念」的教學

教師引導學生根據已知條件選擇所提取的概念，並列出適當的方程式加以運算。

師：我們一起把數字放到方程式中 $1.0 \times V_0 = 0.25 \times V$ --- (1)，

師：由 (1) 可得 $V = 4V_0$ 再代入 $V^2 = V_0^2 + 2a \times \Delta x$

$$(4V_0)^2 = V_0^2 + 2(-9.8)(-6 \times 10^{-2})$$

這裡落下的高度 h 要換成「公尺」喔！

(4) 「反思」的教學

教師引導學生將已經完成的答案與解題歷程，做檢核與回顧，並要求學生能夠整理與說出解題所用到的相關概念和執行的行動。

師：回想一下我們是怎樣解這一題？

生：要知道什麼叫做「流量速率」，還有單位也要注意。

生：用了兩個公式 $A_0V_0 = AV$ 和 $V^2 = V_0^2 + 2a \times \Delta x$

(5) 「應用」的教學

教師引導學生實施類似題的練習，並嘗試以不同的方法解題，或應用於解釋生活中的現象。

師：請翻到第 165 頁做習題 26。(學生解類似題)

師：請大家想想看速率除了用課本介紹的方法 $V^2 = V_0^2 + 2a\Delta X$ 之外，還可以根據什麼理論來求？

全部教學的歷程以「解題路徑圖」表徵如圖 1。

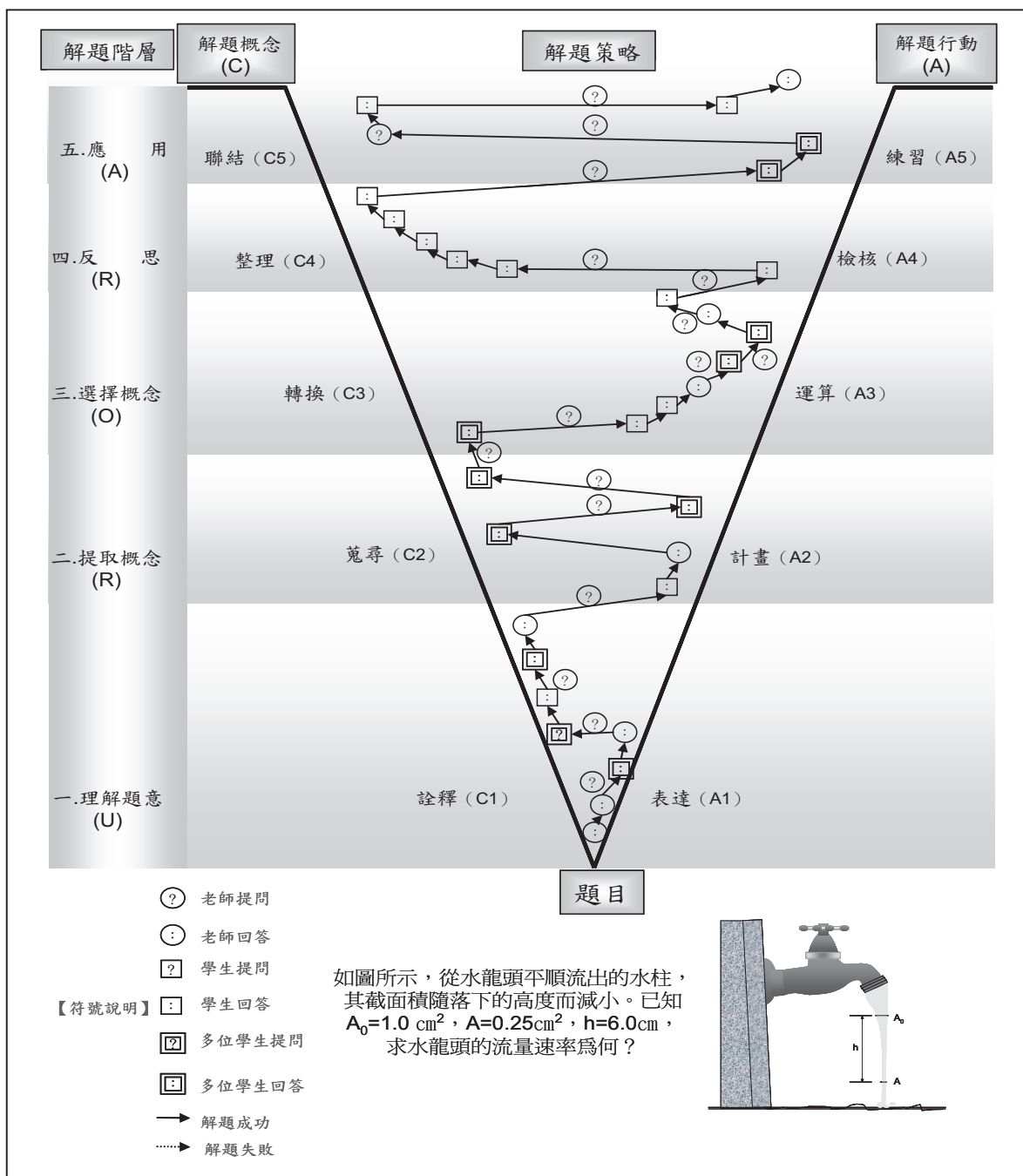


圖 1 教學路徑圖

2. 學生解題的歷程

在解題教學後，指定且觀察二位學生的解題歷程，觀察期間採用放聲思考的策略，藉以蒐集學生解題歷程的資料，經過資料分析並繪製成「解題路徑圖」，得到甲生的解題歷程結果如表 4，路徑如圖 2。

表 4 學生解題歷程原案表

學生解題歷程 (S21101, 第九章第五題)		編碼
原 案	1. 圈出「各輪的轉軸均固定且相互平行。甲、乙兩輪同軸且無相對轉動」	C1
	2. 又圈出「甲、乙、丙、丁四輪的半徑比為 5、2、4、1」	C1
	3. 再圈出「四輪的角速度的比值為何？」	C1
	4. 寫出 $r_{甲} : r_{乙} : r_{丙} : r_{丁} = 5 : 2 : 4 : 1$	A1
	5. 求 $W_{甲} : W_{乙} : W_{丙} : W_{丁} = ?$	A1
	6. $V_{甲} = V_{丁}$	A1
	7. $V_{乙} = V_{丙}$	A1
	8. $W_{甲} = W_{乙}$	A1
	9. $\therefore V = rW$	C2
	10. 可先求出 $W_{甲} = W_{丁} = ?$	A2
	11. 還有 $W_{丙} : W_{丁} = ?$	A2
	12. 由 $V_{乙} = V_{丙} \therefore r_{乙} W_{乙} = r_{丙} W_{丙}$	C3
	13. $W_{乙} : W_{丙} = r_{乙} : r_{丙} = 2 : 1$	A3
	14. $r_{甲} W_{甲} = r_{丁} W_{丁}$	C3
	15. $W_{甲} : W_{丁} = r_{丁} : r_{甲} = 1 : 5$	A3
	16. $W_{甲} : W_{乙} : W_{丙} : W_{丁} = 2 : 2 : 2 : 10$	A3

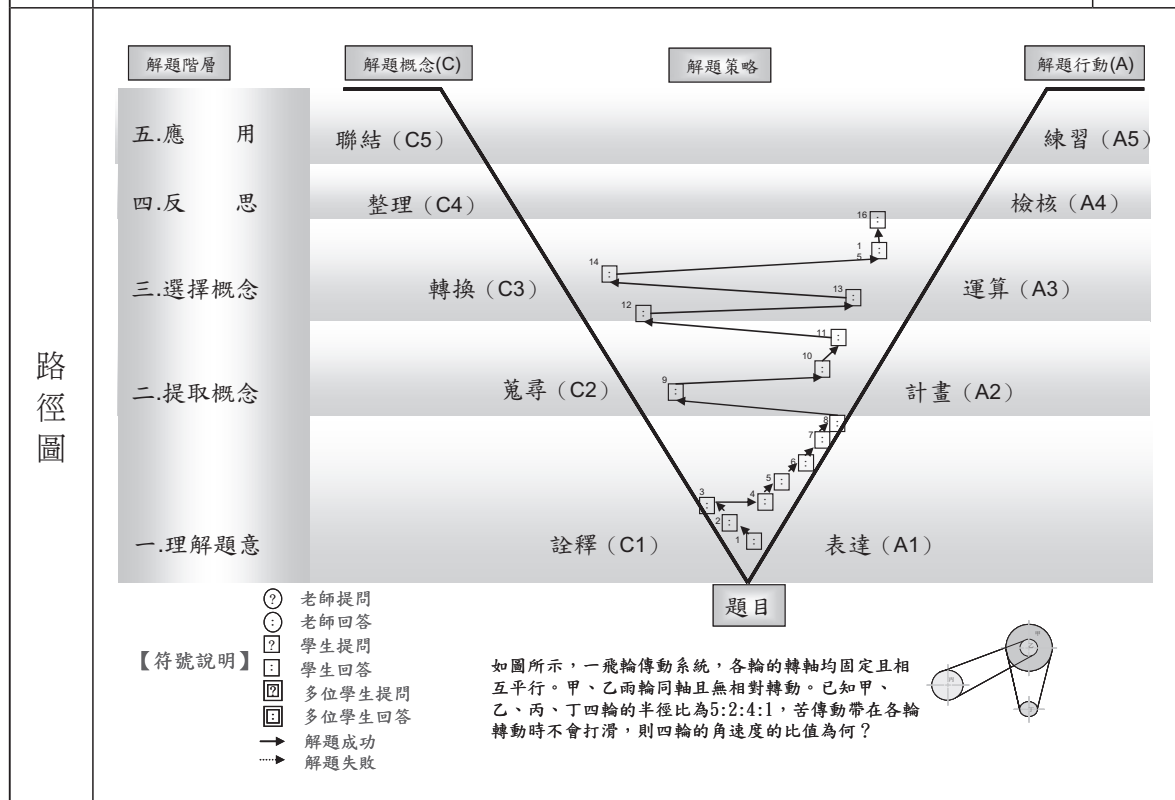


圖 2 學生解題路徑圖 (轉動的習題)

3. 專家教師解題的歷程

為了解專家教師解題的特徵，作為解題教學的參考，採用放聲思考的策略，邀請專家教師針對相同的題目解題（轉動的習題），得到解題歷程的結果如表 5，路徑如圖 3。

表 5 專家教師解題歷程原案表

專家教師解題歷程（陳老師、第九章第五題）		編碼
原案	1. 這題要注意同軸轉動和用傳動轉動的不同	C1
	2. $r_{甲} : r_{乙} : r_{丙} : r_{丁} = 5 : 2 : 4 : 1$	A1
	3. 甲、乙同軸 $W_{甲} = W_{乙}$ 甲乙丙丁不打滑 \Rightarrow 線速度相同	C2
	4. $V = r W \Rightarrow$ $W = V/r \propto 1/r$	A2
	5. $V_{甲} = V_{丁}$ $V_{乙} = V_{丙}$	C3
	6. $\frac{W_{甲}}{W_{乙}} = \frac{r_{丁}}{r_{甲}} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10}$	A3
	$\frac{W_{丁}}{W_{丙}} = \frac{r_{丙}}{r_{乙}} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ $W_{甲} : W_{乙} : W_{丙} : W_{丁} = 2 : 2 : 1 : 10$	A3
7. 再次檢查解題過程和答案	A4	

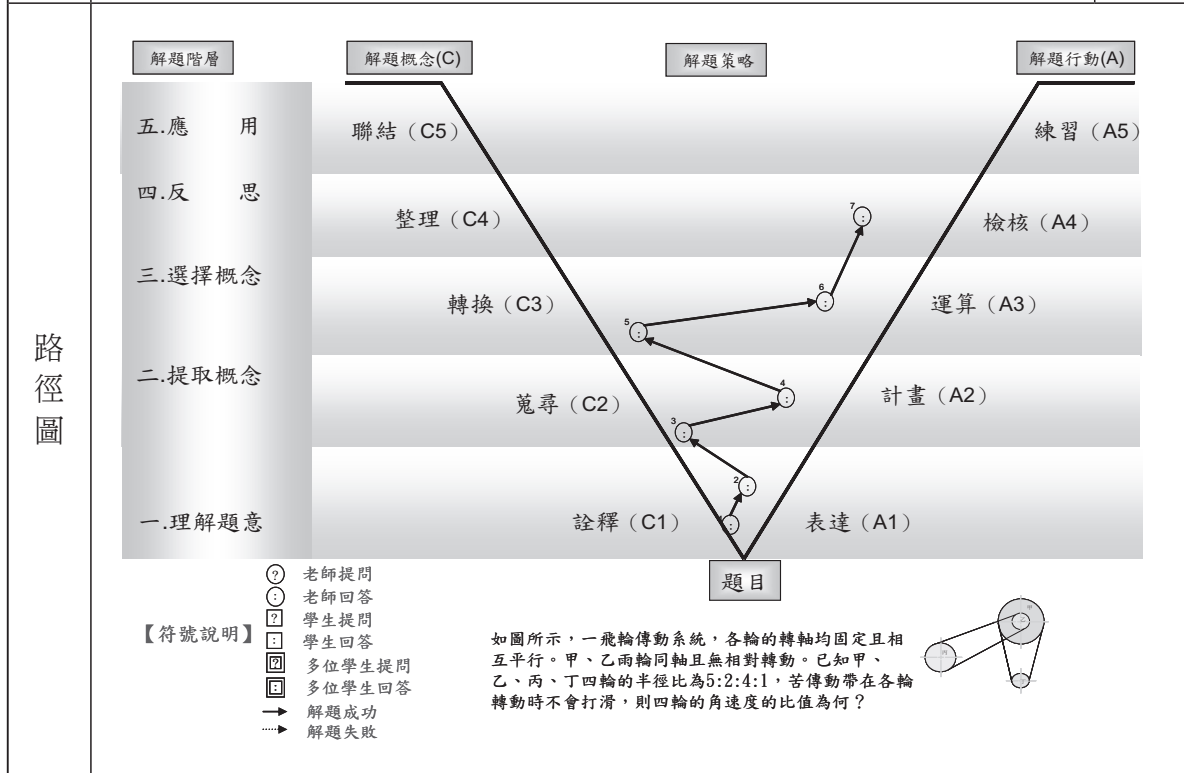


圖 3 專家教師解題路徑圖（轉動的習題）

(三) 解題教學歷程的觀察

觀察的結果分為「解題教學」、「學生解題」、「專家教師解題」等歷程：

1. 解題教學歷程的觀察結果

(1) 教師提問的後設認知

從圖 1 以「解題路徑圖」所表徵的解題歷程（以「○」表示者）來看，發現：教師不斷以包含「解題概念」與「解題行動」的問題作為提問的後設認知，協助學生參與討論，學生才容易循序漸進，達成理解的目標。例如：師：什麼叫做「流量速率」呢？…師：要怎樣去求這個速率呢？

(2) 教師以小步驟做為解題教學的鷹架

又如圖 1 的第一解題階層，共呈現 11 步驟來看，發現：藉由「解題路徑圖」表徵解題教學的歷程，路徑圖呈現弓字型的圖樣、「節點」總數很多，表示解題教學存在許多小步驟。然而，這些小步驟卻能作為引導學生回答問題，增進師生互動的鷹架。例如：師：要注意題目用的是什麼單位？…師：我們是怎樣解這一題？

2. 學生解題歷程的觀察結果

從圖 2 學生的「解題路徑圖」來看，發現：學生的「解題路徑圖」具備「節點數多」與「路徑偏態」的特徵。

(1) 節點數多：學生存在表徵問題的困難

學生在第一階層花費許多節點，表示學生存在表徵問題的困難。以致於學生的解題路徑在第一階層的解題行動軸停留許久，使解題歷程耗費時間。

(2) 路徑偏態：學生存在將解題概念轉換為解題行動的困難。

學生的「解題路徑圖」常偏向解題概念或解題行動，呈現「弓」字型的圖樣，亦即解題概念軸停留 4 到 5 個節點，或解題行動軸停留 4 到 5 個節點。但順利的解題可能只需要 1 到 2 個節點，而呈現「之」字型。

3. 專家教師解題歷程觀察的結果

從圖 3 來看，發現：專家教師的「解題路徑圖」具備「節點數少」與「路徑為之字型」的特徵。

(1) 節點數少：專家教師能迅速提取概念

由專家教師放聲思考的解題歷程，並以「解題路徑圖」來看，發現：專家教師對題目和解題方法間有很強烈的連結，不但能提取整組相關概念，且能交互運用解題概念和解題行動，因此費時甚少。

(2) 「解題路徑圖」為之字型：專家教師能夠迅速地提升解題階層

藉由「解題路徑圖」的表徵來看，專家教師解題的歷程常呈現「之」字型逐級而上，且「節點」總數較為精簡，表示：專家教師能夠在解題時，迅速地提升解題階層。

(四) 教學反省

研究者以「解題路徑圖」觀察解題教學、學生解題、專家教師解題之後，反省的結果如下：

1. 「解題路徑圖」具備表徵解題歷程的功能

解題路徑圖可以呈現解題教學（如圖 1）、學生解題（如圖 2）、專家教師解題（如圖 3）的歷程，值得推廣應用。

2. 協助學生建構豐富的知識基模

因為學生的解題歷程呈現較多的節點數，使歷程呈現偏態（「弓」字型）的現象，對成功的解題形成障礙。而專家教師的解題歷程節點數少，呈現「之」字型的解題路徑，亦即概念與行動交互思考的解題型態，因此，教學時，應協助學生建構豐富的知識基模，藉以降低解題節點數及呈現「之」字型的解題路徑。

3. 促進學生多元表徵的能力

Kohl, Finkelstein (2005) 提出解題表徵的四大形式：數學表徵 (Mathematical)、實物表徵 (Pictorial)、示意圖表徵 (Graphical)、語言表徵 (Verbal) 等，並發現解題表徵與學生的成績有關，且達顯著水準，同時建議物理教師應採用多元表徵的形式教學，因為多元表徵的應用是物理教育的目標。從圖 2 可以發現學生在物理解題時，促進題意與思考歷程的表徵，可以減少解題的節點數，使解題型態趨向專家教師特有的「之」字型解題路徑。

4. 學生的解題仍舊缺乏策略

經由學習成效（月考成績）的觀察，發現仍舊存在許多解題的困難，經與學生晤談的結果推測，學生可能是因缺乏具體的解題策略，因此，教學時應提供學生具體解題策略的練習機會。

在解題模式的縱座標與橫座標完成建構之後，發現學生仍舊可能在解題歷程中受到阻礙，因此，在學生解題受到挫折時，適時的提供解題策略是必要的 (Montague, 1997；張淑娟、柳賢，1997)。

第三階段 精煉解題教學模式階段

從上一階段的反省結果，本階段以學生的解題困難發展解題教學策略，以精煉「URORA」。

(一) 解題教學策略的計畫

從上一階段教學反省的結果發現：學生藉由蘊含解題元素之五大階層解題教學模式進行解題時，仍存在相當的困難，因此，本階段計畫提供解題策略協助學生順利解題。

後設認知解題策略之具體行動可以分為自我監控、自我提問、自我引導之交互運用 (Montague, 1997；張淑娟、柳賢，1997)。從本研究所發展的解題路徑圖來看，符合後設

認知的解題策略特質，但學生在實施後設認知的學習上，仍存在著相當多的困難，主要是缺乏自我監控、提問、引導的具體物理概念。

(二) 解題教學策略的教學行動

為了解學生解題的歷程及失敗的原因，研究者安排個別的解題教學，並要求學生以放聲思考的方式表達思考歷程，教師協助學生自我監控、自我提問、和自我引導等解題策略。建構解題教學策略之解題教學歷程及其解題關鍵分五階層說明如下：

1. 「理解題意」的教學

以生活經驗協助學生分析待求的問題，並以提問的方式引導學生用符號和圖形表達題意。

師：我們根據題意先畫出混合的溫度變化圖，想想看末溫 t 的範圍是什麼？

生：在冰和沸水之間，可寫成 $0^{\circ}\text{C} \leq t \leq 100^{\circ}\text{C}$ 。

2. 「提取概念」的教學

由待求問題分析出相關概念和待解的子問題，並將子問題逐一排序，形成解題計畫。

師：要根據什麼關係求末溫呢？

生：冰吸收的熱等於沸水放出的熱 $\Delta H_{\text{冰}} = \Delta H_{\text{沸水}}$ 。

3. 「選擇概念」的教學

依照解題計畫的順序，分別選擇適當的公式列方程式，再加以運算求解。

師：有溫度變化的部分，熱量要怎麼算呢？

生：用 $\Delta H = ms\Delta t$ 然後寫成

$$20 \times 80 + 20 \times 1 \times (t - 0) = 40 \times 1 \times (100 - t) \quad t = 40^{\circ}\text{C}$$

4. 「反思」的教學

以待求物理量的範圍檢核答案，並整理解題概念。

師： 40°C 在 0°C 和 100°C 之間，所以這就是答案，想想看還有什麼要注意的？

生：有溫度變化時， $\Delta H = ms\Delta t$ ；沒有溫度變化時， $\Delta H = mx$ ， x 是潛熱

5. 「應用」的教學

演練類似題，並以概念解釋生活實例。

師：我們來解類似題，同樣要求末溫為多少？

題目：一質量 30 克 0°C 的冰，加入 100 克 20°C 的冷水，末溫為 _____ $^{\circ}\text{C}$ 。

生：解出來是負的耶！可是 t 應該在 0°C 和 20°C 之間。

師：想想看在生活當中，如果把一杯冰塊加入一些冷水，冰塊會馬上融化嗎？

生：不會，所以這一題表示冰塊還沒完全融化，所以末溫是 0°C

(三) 教學觀察

在建構解題策略之解題教學期間，研究者經由全程的錄影資料的觀察發現：

1. 學生能依照教師的示範解題

教師已經示範過的例題，學生可以依據學習經驗表徵物理概念，繼而運用解題策略成功解題，並啟發解題興趣，展現自信心。例如學生說：老師有做過的，看起來就很簡單，我們就會啊。

2. 學生對於生疏的物理解題仍存在相當的困難

在教師提供解題策略後，學生應用於生疏的題目時，仍舊呈現困難。例如學生說：「老師沒有教過的，我們就不知道要監控什麼？引導什麼？」

(四) 教學反省

從觀察結果得知：學生雖知解題策略運用的方法，但缺乏後設認知思考的具體基礎：自我引導、自我提問、與自我監控的物理量，亦即存在「物理量」分析的困難。因此，教師應當在教學期間重視物理量的分析。

1. 「分析物理概念」應納入解題教學策略之中

Newmann (1988) 在回顧了許多哲學、心理學和教育的文獻後，將高階思考定義為：「為了解答一個非例行性練習的問題，而對資訊的詮釋 (Interpretation)、分析 (Analysis)、與操作 (Manipulation) 的歷程。」而成功的物理解題就是一種高階思考 (Resnick, 1987)，本研究醞釀提出的解題教學模式已將資訊的詮釋與操作轉化為五大解題階層，然而，依據 Eysenck, Keane (2000) 對問題解決的觀點及行動研究觀察的實徵資料，成功的解題經常需要藉由「分析」的方法來轉換陳述性知識和程序性知識，再執行解題策略，使得後設認知的解題教學策略包含了分析、監控、引導、和提問等元素。

2. 後設認知解題教學策略的內涵

具體的後設認知解題教學策略應以物理概念的分析為基礎，教學策略的內涵包括：

- (1) 分析：根據解題階層的內涵，提出具體的陳述性知識（物理概念）與程序性知識（解題行動），包括要素分析、關係分析與組織原理分析 (Bloom, Hastings, & Madaus, 1971；施良方, 1996)，例如物體作正向彈性碰撞時，能分解其狀態變化歷程，並提取動量守恆和力學能守恆的概念。
- (2) 提問：提出與該解題階層相關之解題概念和行動的問題。
- (3) 引導：以狀態的變化歷程，思考相關的物理概念以及解題行動。例如物體只受保守力作用，則力學能守恆。

(4) 監控：以各解題階層相關的陳述性知識和程序性知識檢視解題行動。

茲以「正向彈性碰撞」的教學歷程為例，說明後設認知解題教學策略運用的情形，如附錄一。

3. 精煉高中物理解題教學模式 (URORA)

歷經以上的建構歷程，逐步精煉 URORA 後，共獲得縱軸的五大解題階層、橫軸的解題概念與行動、以及後設認知的解題教學策略等，因此，解題的橫軸元素共有解題概念、行動、與策略等，茲整理如下圖四。

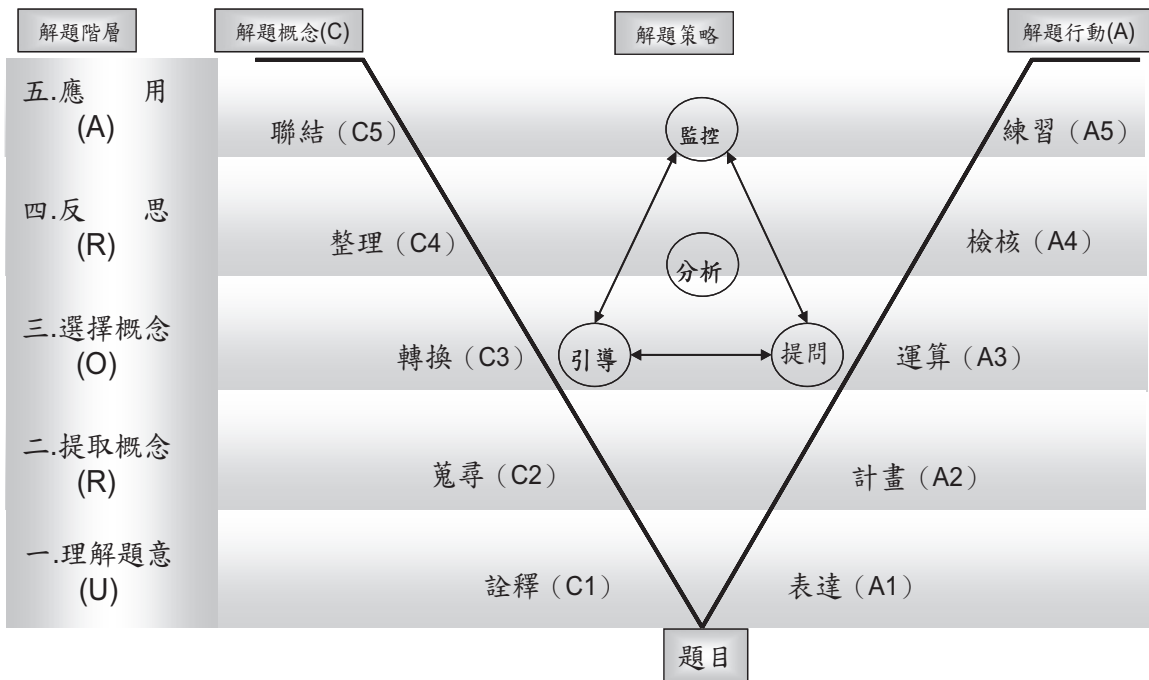


圖 4 高中物理解題教學模式 (URORA) 圖

第四階段 解題教學模式的評鑑階段

本階段計畫以 URORA 實施教學，蒐集學生物理學習成就的資料進行分析，希望針對 URORA 的有效性進行評鑑。以準實驗研究的方法，安排實驗組與對照組（請參閱研究對象）分別施與 URORA 的教學及傳統解題示範式的教學，以研究者自編之「高中物理學習成效試卷」作為評量的工具。

另外，選取平日經常與教師討論的學生 8 人，以放聲思考的方式實施解題，藉以蒐集其運用 URORA 解題前後的資料，並以「解題路徑圖」表徵其歷程，茲以甲生的解題路徑圖（如圖 5a 及 5b）介紹其教學成效：

(一) URORA 解題前：學生的解題路徑為不規則型

圖 5a 呈現甲生在 URORA 教學前的解題歷程為不規則型，該生在理解題意後企圖直接列式運算，但沒有成功，又回到第一階層重新理解題意，再到第二階層蒐尋相關概念，

重新列式運算，得到成功的解題結果。

(二) URORA 解題後：學生的解題轉變為趨向專家解題的路徑

圖 5b 呈現甲生在 URORA 教學後的解題歷程，是按照階層的順序逐級而上，解題路徑圖與專家教師相似，得到成功的解題結果。但，第一階層出現衆多節點，表示該生在詮釋與表達題意方面仍舊生疏，惟歷經第一階層之後，呈現「之」字型，即能將解題概念與行動交互思考逐級而上，達成成功解題。

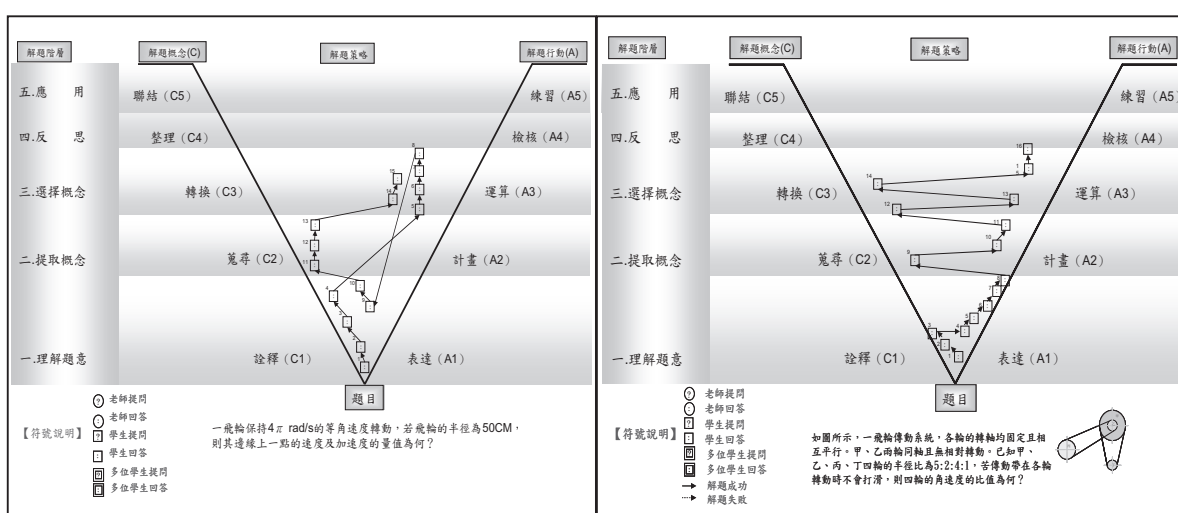


圖 5a 甲生在 URORA 教學前的解題路徑圖 (轉動的習題一)

圖 5b 甲生在 URORA 教學後的解題路徑圖 (轉動的習題二)

從上圖 5a 與 5b 的比較發現：學生在 URORA 教學後進行解題時，比較節省時間，並順利解題。經過訪談，甲生表示：「我現在比較知道怎樣做題目了，以前都只會湊數字啊，把公式和數字湊一湊啊，就希望能夠得到答案」；另一位學生說：「我現在比較知道要怎樣去想題目了」，顯示本研究提供具體的解題策略，可協助學生趨向專家的解題路徑，與 Brass, Gunstone, Fensham (2003) 提出「運用後設認知作為解題策略應能促進學生物理解題能力」的看法一致。

肆、行動研究的結果

本研究的結果，可以推知高中物理解題教學模式 (URORA)，對學生的解題具有相當的成效。

一、URORA 可以提昇學生物理解題的成績

將實驗組與對照組的物理成績 (包括「總成績」及「物理解題成績」) 進行獨立樣本的假設檢定，發現採用 URORA 教學的班級「總成績」及「物理解題成績」均優於對照組，且均達 0.05 的顯著水準。

(一) 實驗組與對照組的前測成績沒有差異

蒐集 112 位實驗組及 106 位對照組學生的月考物理成績，並以其高一選組之前的物理學期成績作為前測，考驗結果得到 $t=-0.0125$ ，經查表 $P=0.998>0.05$ ，未達 0.05 的顯著水準，由此可知：本研究實施前，實驗組與對照組學生的物理成就並無差異。

(二) 實驗組的「物理總成績」優於對照組

採用兩組獨立樣本的假設檢定得到 $t=2.932$ ，經查表 $P=0.0034<0.005$ ，達到 0.005 的顯著水準，表示實驗組的物理成績高於對照組，亦即以 URORA 教學的班級，月考成績顯著優於未以 URORA 教學的班級。

(三) 實驗組的「物理解題成績」優於對照組

物理解題的成績進行兩組獨立樣本的假設檢定，得到 $t=2.089$ ，經查表 $P=0.0366<0.05$ ，達到 0.05 的顯著水準，表示實驗組的物理解題成績優於對照組，亦即以 URORA 教學的班級，物理解題的成績顯著優於未以 URORA 教學的班級。

以上量化資料的說明，整理如表 6：

表 6 實驗組與對照組成績差異比較表

組別	人數	平均分數	標準差	t 值	P 值
實驗組 前測	112 人	77.89 分	7.696	-0.0125	0.9980
對照組 前測	107 人	77.91 分	8.470		
實驗組 總成績	112 人	59.96 分	13.552	2.932***	0.0034
對照組 總成績	106 人	54.25 分	15.059		
實驗組 解題成績	112 人	1.23 分	1.044	2.089*	0.0366
對照組 解題成績	106 人	0.96 分	0.838		

* $P<0.05$ ** $P<0.01$ *** $P<0.005$

對照組中有三分之二為第二類組學生，每週四節物理課，三分之一為第三類組，每週三節物理課；而實驗組均為第三類組，每週三節物理課，如此實驗組的學生在物理學習時間較少的情況下，仍優於上課時數較多之對照組，可以推知「URORA 能夠提升高中物理的學習與解題成效」。

二、URORA 可以改善學生物理解題的學習

學生的改變除了成績以外，仍能提升學習興趣與自信心，同時改善學生提問的品質，茲分述如下：

(一) 提昇學生對物理解題的興趣與自信心

學生在 URORA 的教學後，因為解題效能的提升，增加了學習物理的興趣，也提升了對學習物理的自信心，不但比過去願意動筆解題，且願意嘗試挑戰生疏的題目，例如一位同學說：「老師，妳再出一題讓我做做看？」、「老師，還有沒有其他可以練習的題目？」。

研究者觀察學生上課比過去專心，完成筆記的比例也增加了（請參閱第一階段的觀察資料），一位同學聽到鐘聲時說：「喔，這麼快就下課了？」、另一位同學說：「我越來越愛物理了」，接著說：「老師，我知道妳為什麼要學物理了。」

(二) 促進學生提問的品質

學生在 URORA 教學後，問問題的次數增加，例如一位很少參與討論的學生於課後表示：「以前我都不知道要怎麼問問題？現在比較知道哪裡不會！也比較敢問問題了。」；且發現高成就的學生多藉著詢問不同解法來澄清觀念，中成就的學生多問一些題目如何解的問題，低成就的學生則常問有關數學運算的問題。例如教師用力學能守恆的觀點解彈簧速率的題目時，一位物理成績頗優秀的學生問：「什麼時候可以用 $\Delta U = -\Delta K$ ？和用力學能守恆的觀點解題一樣嗎？」另一位學生則問到：「這題可不可以用簡諧運動的方法來解？」，並且有些學生也逐漸轉變問題的類型。

三、高中物理解題教學模式（URORA）的限制

(一) 研究對象的限制

本研究因為時空的因素受到下列研究對象的限制，(1) 以研究者所任教的班級為對象；(2) 以教學歷程做為行動研究的歷程；(3) 研究對象入學高中的基本學力測驗百分等級平均約 76，以上三者均可能具有其特殊性。因此，本研究的結果受到研究對象相當的限制。

(二) 學科領域的限制

本研究針對高中物理的解題進行研究，應具有學科領域的特徵。數學與化學亦均有解題的問題，但可能各具有其學科特性，使本研究的結果受到相當的學科限制。

教師在運用 URORA 物理解題教學後，發現解題時則依解題階層循序漸進，且以解題元素作為提問的鷹架，使教學歷程變得更有序，更容易引導學生成功解題，改善因概念提取困難造成解題歷程冗長的缺失，並能注重師生的互動，避免教師自問自答的傳輸式教學。Joyce 和 Weil (1996)、洪振方 (2004) 與蘇明俊 (2004) 均認為教學模式就是學習模式，因此，URORA 亦應能提供學生解題的依循，成為「解題模式」，又從學生的學習成效來看，確實能夠促進學生的解題能力。

伍、結論與建議

藉由行動研究逐步完成建構的「高中物理解題教學模式 (URORA)」，第一階段為「建構解題教學階層」，獲得解題教學模式的五大階層，但發現對於學生應用於物理解題，仍有不足之處；第二階段為「建構解題教學元素」，增加解題教學元素作為模式的橫座標，可作為教師提供的鷹架，但發現學生應用於解題時，仍舊缺乏解題的策略；第三階段為「精煉解題教學模式」，發展解題教學策略，以增進學生的解題成效；第四階段為「評鑑解題教學模式」，藉由解題與教學成效的提升，評鑑模式的可行性，採用 URORA 教學班級的物理成績優於未採用的對照組，故知 URORA 足以改善高中物理的解題教學成效。

建議高中物理教師採用具有解題階層、解題元素的「高中物理解題教學模式 (URORA)」實施教學，避免解題時隨意變化解題階層，監控自己的教學順序，而學生則用來實施解題。

陸、參考文獻

一、中文部分

- 林生傳 (2000)。新世紀教師行動研究的定位與實踐機略。國立高雄師範大學教育學刊，16，1-31。
- 洪振方 (2004)。探究式教學的歷史回顧與創造性探究模式之初探。行政院國家科學委員會九十二年度專題研究計劃成果報告，NSC 92-2511-S-017-022。
- 施良方 (2001)。學習理論。台北：麗文文化公司。
- 張淑娟、柳賢 (1997)。高一學生後設認知能力與數學解題能力關係之研究。中華民國第十三屆科學教育學術研討會。
- 陳章正、江新合 (2006)。高中學生物理解題歷程之研究。中華民國第二十二屆科學教育學術研討會。
- 蘇明俊 (2004)。野外探究教學模式之研究。國立高雄師範大學科學教育研究所博士論文 (未出版)。

二、英文部分

- Bandura, A. (1977). *Social learning theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Bloom, B.S., Hastings, J.H., & Madaus, G.F.(1971). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*. NY. McGraw-Hill.
- Brass, C., Gunstone, R., & Fensham, P. (2003). Quality learning of physics: Conceptions held by high school and university teachers. *Research in Science Education*, 33(2), 245-271.
- Bruning, R. H., Schraw, G. J., & Ronning, R. R. (1995). *Cognitive psychology & instruction*. Englewood Cliffs, NJ: Merrill.

- Comacho, M., & Good, R. (1989). Problem solving & chemical equilibrium: successful versus unsuccessful performance. *Journal of Research in Science Teaching*, 26(3), 251-272.
- Delong, J. (2004). *Action research implemented in the Grand Erie District School Board: Impact on teacher development, improvement and the support system*. Lecture to the Japanese Association Educators for Human Development on the 29th February 2004. Retrieved March 29, 2007, from http://schools.gedsb.net/ar/articles/japan_march_2004.html
- Duit, R., & Treagust, D. (2003). Conceptual change: A powerful framework for improving science teaching and learning. *International Journal of Science Education*, 25(6), 671-688.
- Eysenck, M.W., & Keane, M.T.(2000). *Cognitive psychology: A student's handbook*, 4th ed. Psychology Press Ltd.
- Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906-911.
- Gowin, D. B. (1981). *Educating*. Ithaca, NY: Cornell University Press.
- Greenbowe, T. J. (1983). An investigation of variables involved in chemistry problem solving. (Doctoral dissertation, Purdue University, 1983). *Dissertation Abstracts International*, 44, 3651A.
- Hestenes, D. (1987). Toward a modeling theory of physics instruction. *American Journal of Physics*, 55(5), 440-454.
- Kemmis, S., & McTaggart, R. (2000). Participatory action research. In Norman K. Denzin & Yvonna S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (2nd ed., pp.567-605). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Kohl, P. B., & Finkelstein, N. D. (2005). Student representational competence and self-assessment when solving physics problems. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.* 1(1), 010104.
- Larkin, J. H. (1983). The role of problem representation in Physics. In D. Gentner & A. L. Stevens (Eds.), *Mental models* (pp. 75-98). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lawson, A. E., Abraham, M. R., & Renner, J. W. (1989). *A theory of instruction: Using the learning cycle to teach science concepts and thinking skills*. Manhattan, KS: National Association for Research in Science Teaching.
- Lind, D. A., Marchal, W. G., & Wathen, S. A. (2006). *Basic Statistics for Business & Economics*. New York, NY: McGraw-Hill.
- Lippert, R. (1988, April). *Linking recent research in cognitive science and problem solving to instructional practice: New possibilities*. Paper Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.
- Montague, M. (1997). Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 30(2), 164-177.

- Newmann, F. M.(1988). *Higher order thinking in the high school curriculum*. NASSP Bulletin, 72(508), 58-64.
- Noffke, S. (1994). Action research: Towards the next generation. *Educational Action Research*, 2 (1), 9-21.
- Olson, J. K., Cox-Petersen, A. M., & McComas, W. F. (2001). The inclusion of informal environments in science teacher preparation, *Journal of Science Teacher Education*, 12(3), 155-173.
- Palincsar, A. S. (1986). The role of dialogue in providing scaffolding instruction. *Educational Psychologist*, 21(1&2), 73-98.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Garden City, NY: Doubleday.
- Pramual, S. (1990). *Variables involved in physics solving by tenth graders in Thailand*. Unpublished doctoral dissertation. Purdue University, West Lafayette, IN.
- Reif, F., Larkin, J. H., & Brackett, G. C. (1976). Teaching general learning and problem-solving skills, *American Journal of Physics*, 44(3), 212-217.
- Resnick, L. B.(1987). *Education and learning to think*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. In L. B. Resnick & B. L. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research* (pp. 83-103). (1989 Yearbook of the American Society for Curriculum Development). Washington, DC: ASCD.
- Toulmin, S. (1972). *Human understanding. Vol. 1: The collective use and evolution of concepts*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Treagust, D. F., Chittle, B. G., & Mamiala, T. L. (2002). Students' understanding of the role of scientific models in learning science. *International Journal of Science Education*, 24(4), 357-368.
- Yager, R. E. (1991). The constructivist learning model. *Science Teacher*, 58(6), 52-57.

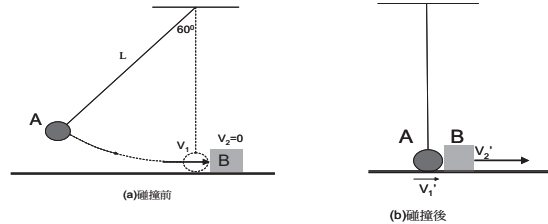
附錄 運用後設認知解題教學策略的實例：「正向彈性碰撞」單元

題目：在圖 (a) 中，細繩的長度 $L=0.80$ 公尺，上端固定，下端懸一鋼球 A，其質量， $m_1=0.50\text{kg}$ 。將 A 球向旁拉起至繩與鉛直方向夾成 60° ，然後使 A 球自靜止開始釋放。當 A 球擺至最低點時，恰與靜止的木塊 B 發生正向彈性碰撞。若木塊 B 的質量為 $m_2=0.30$ 公斤，則碰撞後

(1) A 球可上升至多大的高度？

(2) 木塊 B 的速度為何？

(全班解題教學)



編號	解題教學之師生對話	解題策略的元素	編碼
1	師：讀完題目後，大家覺得這題有什麼關鍵詞？	提問	C1
2	生：彈性碰撞。		C1
3	師：我們把碰撞過程慢動作分解，先畫出原先的狀態，就是圖 1。	引導	A1
4	師：原來拿著 A 球的手，鬆開後會怎樣？	提問	C1
5	生：A 會盪下來，然後去撞 B。		C1
6	師：很好，我們把圖畫下來，就是圖 2， V_1 代表 A 撞 B 前的速度。	分析（要素分析）	A1
7	師：碰撞後 B 以 V_2' 的速度繼續前進，但是 A 會怎樣？	提問	C1
8	生：因為 A 受到繩子的牽制，所以便往上盪。		C1
9	師：我們把這個過程畫下來作為圖 3 和圖 4。	監控	A1
10	師：畫完圖之後，因為必須寫方程式，所以想想看每個圖形間有什麼物理量是保持不變的？	分析（關係分析）	C2
11	生：圖 1 到圖 2 是力學能守恒。		C2
12	師：圖 2 到圖 3 呢？（學生不語）碰撞需不需要外力介入？	提問引導	C2

13 生：不用外力所以動量守恒。		C2
14 生：老師，圖 3 到圖 4 是不是也是力學能守恒？		C2
15 師：對呀！我們由保持不變的變因，知道題目整個狀態變化過程所根據的物理原理，現在我們再根據這些原理依序寫出圖形和圖形間的方程式。	監控	A2
16 師：圖 1 到圖 2 可以寫什麼方程式？	提問	C3
17 生： $\because E_1 = E_2$ $\therefore m_1 gH = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$ $V_1 = \sqrt{2 gH}$		
18 師：圖 2 到圖 3 是 A 以 V_1 的速度，彈性碰撞 B，所以可寫什麼方程式？	分析	C3
19 生：A 球撞後的速度 $V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1$	(組織原理分析)	C3
20 生：B 撞後的速度 $V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gH}$		C3
21 師：所以根據力學能守恒，圖 3 到圖 4 應該怎麼寫方程式呢？	監控	C3
22 生： $\frac{1}{2} m_1 V_1'^2 = m_1 gh$ 這樣就可以得到 h 的答案		
23 師：請大家比較一下課本的解法和我們的解法有什麼不同？	提問	A3
24 生：課本只有 2 個圖，我們有 4 個圖。像這種中間還要求出很多個問題的題目，把圖形都畫出來比較容易想，但簡單的題目可能畫一個圖就可以了。		C4
25 師：下次再遇到類似題，即使沒有畫出這些圖形，是不是也能知道要求哪些問題？以及要怎麼求？	監控	C4
26 生：要先求最低點碰撞前的速度，再求撞後的速度，然後用力學守恒求高度。		C4

幼童數量知多少？不同族群幼童數量推理發展之研究

The Research of Young Children's Numerosity Discrimination in Different Ethnic Developing Quantitative Reasoning

陳埤淑*
Ching-Shu Chen

(收件日期 96 年 4 月 18 日；接受日期 96 年 7 月 31 日)

摘 要

本研究旨在探討幼童數量推理能力的發展，並分析不同族群幼童，在數量判斷上的表現。本研究的樣本取自美國夏威夷州小學附設幼稚園二十名及台灣國小附設幼稚園及私立幼稚園各二十名幼童，男女各半，平均年齡 5.5 歲。研究方法採用評量、觀察與訪談。為瞭解幼童數量推理能力的表現，本研究發展出兩種實物評量對不同族群的幼童施測。幼童在進行兩組數量的比較時，以不經計算，用目測估算解題，比較兩數量的大小。研究結果顯示在具體實物（如玩具動物）評量中，幼童答對 75% 以上，符合具體認知發展模式，且沒有群族差異；再以半抽象的物件測，如動物貼紙測幼童，發現幼童在判斷 2：3 比例的量數上，表現佳，然而在比較 5：6 的數量時，表現較差，因為幼童會受到物件大小及排列面積的影響。此外，台灣的幼童答對率在一些數量推理上高於夏威夷的幼童。最後，根據研究結果提供幼童教學建議：1. 幼童數學教學應從數量概念學習著手，才進入數數的練習，以幫助幼童建立正確數的概念；2. 結合幼童的生活經驗，讓幼童有具體操作、評估、比較與預測的機會，為幼童奠下良好數學基礎。

關鍵詞：數量概念、數量大小、幼童數學

*臺南科技大學師培中心

Abstract

The purpose of this research was to explore the development of quantitative reasoning in young children, and also to analyze the numerosity discrimination of children from different groups. The results will be applied to early childhood mathematical pedagogy. The research subjects came from three kindergartens in elementary schools in Hawaii and Taiwan. Each research group has twenty children. In addition, twenty children were sampled from a private kindergarten in Taiwan. Each school had twenty children who were equal in gender and were an average of 5.5 years old. Research methods used assessment, observation and interview. There were two objective scales to evaluate the children's quantitative reasoning. During the process of the research, the researcher gave opportunities to children who operated objects and named objects, and practiced a small aggregate amount before the formal test. At the same time, the researcher asked the children, without actually counting, but with a quick look with their eyes to estimate two aggregate amounts, then, solved problems. The result showed that the children had a 75% success rate to discriminate numerosity in real objects that fit the developmental model of cognition, but without the cultural difference. Furthermore, when using the scale of half obstacle objects (sticker) to test the children, the result revealed that children performed the 2:3 ratios to discriminate numerosity better than 5:6 ratios. However, Taiwanese children had correct answer scores that were higher than those of Hawaiian children on some problem items. Moreover, to apply the research results to early childhood instruction: 1.To start the concept of quantity learning, then to practice counting to help children have good number concepts. 2.To combine the children's life experiences to give them opportunities of operation, estimation, comparison and prediction so that those children can have a good mathematics foundation.

Key words: Quantitative concept, Numerosity, Young children mathematics

壹、前言

數學是基礎科學，數學領域的學習包含數、形、量基本概念之認知，也包含一套數與量關係的概念，因為數學不只關於數字而已，還要與量有關，如果忽略量的成份 (Quantity Component) 則這學科是毫無意義。數的（指自然數）概念是數學中基礎的知識，近年來國家為提早培養科學人才，開始重視兒童早期的數學教育，如美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, 1991) 編訂的數學課程與評鑑標準，揭示數學課程的基本立論應以「概念為取向」；而在去年的 NCTM (2006) 數學課程焦點中，更提出幼稚園學生理解數的概念，必須從數量 (Quantity) 開始，而我國九年一貫的課程，在小學一年級的數學課程中，也是從點數物件的量開始，先從 1-10 數數看有多少（翰林第一單元）？再到 11-20「數一數各種東西有幾個？」（翰林第九單元）？可見數量概念是兒童數學學習中同被看重，又因專家學者想要掌握兒童數學概念的形成與發展，因此，兒童數概念的研究隨之興起，數量的概念在數學教育上也逐漸受重視。

然而，在未進入國小階段正式學習數學之學前幼童是否已經具有數量的推理能力？就幼童而言，在他們的日常生活中常有機會點數物件，例如，吃點心時要吃幾個？堆積木、彈彈珠比賽時，誰多或誰少？都是需要有數量的概念，才能知道自己可以吃了幾個或知道贏得公不公平，因此，在幼童生活中數量的概念，在社會技能及學習上是很重要的概念，學者 Graziano, Musser, Rosen, Shaffer (1982) 的研究曾指出，幼童數學能力與遊戲公平的標準有關，數量分配不好的幼童，無法作公平分配，會造成他們與同儕間互動及學習上的困擾。

然而，幼童在數量概念的發展上是否有其共同的模式？或者不同的族群之間也會有不同的推理表現？引入深思。由於研究者有機會進入夏威夷多族群的幼稚園及台灣幼稚園的研究現場中，觀察兩地的幼童在數學課堂上數數及計算，於是萌發以研究設計來探討兩者的數量概念發展及推理能力。

就不同族群的表現而言，過去的研究作過美中兒童數學的比較，台灣國小兒童每學期的數學課節數、課後的家庭作業時間，都遠高於美國兒童，如此，我們預期台灣國小兒童的數學成就會比美國同儕高；另外，台灣的幼童中文數字的發音長度，比英文數字發音長度來得短，照認知心理學的理论，台灣兒童數字記憶廣度 (Digit Memory Span) 就應該比美國兒童來得長。再者，中文的數字名稱 (Number Names) 和十進位系統是一一對應的，從 1 數到 10 之後就開始十進位的循環，「十三」表示一個 10，一個 3；「四十二」表示四個 10，一個 2 等等。英文數字名稱和十進位系統的關係則不明顯，從一到十二都是不同的唸法，十三之後好像有點規律，但先唸「thir-」再唸「teen」，這和阿拉伯數字從左到右的寫法 13，剛好顛倒。而且，30 和 13 的英文讀法又太接近，會造成混淆，從這裡推論，可以猜測，以英語為母語者，其數數的發展，應該慢於以中文為母語者。在此推論下，顯然，口語 (Verbal) 與數量的計算有直接的關係 (Corde & Gelman, 2007)。因此，研究設計若是避開這些因素，幼童不經口語數算，而以目測估算的方式作數量推理，是否不同族群的幼童在數量推理上會有差異？值得探討。

因此，本研究擬探討幼童數量概念發展與不同族群的幼童數量推理表現，且期望研究結果能提供幼童數學教育的參考。

貳、文獻探討

一、數量概念對幼童的重要

數量是指分別計數的量，通常指「分離量」，即指它集合中的每一個個體都是獨立分開(周淑惠，1999)。數量概念要從點數物件的萌發而成，而數量是運算及理解數字的開始(Copley, 2000)。然而，幼童在掌握數概念上，是一個比較複雜的過程，因為年齡小，身心都在發育中，幼童須要不斷累積經驗逐步形成數的概念，而且要經歷一個較長期的過程，不僅要會數數、還要理解數的涵意、知道數的順序和大小、理解數的組成和數的守恆，及掌握數的讀寫法。

事實上，數學是研究現實世界數量關係和空間形式的科學，數量關係是數學本身內在聯繫及數規律的反映，當掌握數量關係的同時，幼童的思考能力也會跟著同步增長。一般幼童在學前階段先接受數數的教學，直接從數字的計算學起，而不是從操作具體的物品開始，他們未先具有量的概念，就要結合數與量的學習，則難以形成數的概念(Sophian, 2002)。因為幼童要掌握數量關係，必需具有相應的思維能力，特別是抽象概念的思考能力。因此，數量關係及幼童掌握數量關係是學習數學中，發展幼童數學思考的重要因素。幼稚園老師的任務就是將數學教育內容當中，蘊含著的一些簡單的數量關係揭示出來，引導幼童去探索，並初步理解，藉以達到發展幼童思考能力。

二、幼童數量概念的發展

幼童會唱數並不等於就有數量的概念。因為有些幼童未進入幼稚園之前，已經會唱數，他們可以從1唱到100，但他們卻沒有數量感，因為他們缺乏數量的守恆概念，另外，有的幼童唱數的時候，最初會有韻律感，後來會跳數，表示數字在幼童腦中形成一連串的聲音，但未有實物對應的關係，所以才會有跳數的現象發生，因為幼童的數量概念與其認知發展有關。

根據皮亞傑的認知發展理論，幼稚園階段的幼童是屬於前運思期。前運思期幼童認知發展的特色有三點：第一，知覺有集中的傾向(Perceptual Contraction)，也就是他們在面對問題情境時，只憑知覺集中在事物的單一向度或層面上的思考，忽略掉其他的向度或層面，所以會出現不合邏輯(Logical Thinking)的思考模式；第二，缺乏保留概念，「保留概念」意指不管兩組同數實物的物理外觀安排如何變化，幼童能辨識這些數目仍為同等不變(Ginsburg & Oppen, 1988)。這時期的幼童也具有不可逆性(Irreversibility)的推理能力。不可逆性是指幼童無法在內心裡以合乎邏輯的方式重新排列物體；第三，自我中心主義(Egocentrism)，幼童認為別人的想法跟自己的想法是一樣的；只能集中在一個向度上或一

個面向上。由於自我中心主義 (Egocentrism)，面對問題情境思維時，只會從自己的觀點著想，不會考慮到別人的不同看法或採用多方面的觀點作操作或思考，因此，這階段的幼童比較不具有邏輯思考的能力 (張春興，1995)。

再者，依據皮亞傑的理論中，數字的概念基於幼童的先備概念，乃從他們分類、排序及一對一的對應而來，而這些概念必須經由具體的操作而得 (林清山譯，1992)。如果，幼童在未發展出數的先備概念前，強行教算術，他們僅學會記憶，無助於作數的推理與思考。更甚者，在幼童數量概念的發展上，皮亞傑認為幼童數量概念的發展是獨立自發、無人教導的；而且保留數目不變性的能力是數學理解的必要的條件，幼童到了六歲半左右，很自然的發展出這樣的能力 (Piaget & Szeminska, 1952 ; Piaget, 1953)。雖然幼童在六歲半以前會唱數、計數、甚而會一些簡單的加減運算，但是若不具有保留 (Conservation) 的心智能力，都不算是對數目有真正的瞭解，因此，幼童必須對數量有「保留概念」，才是對數有真正的理解。

再者，根據皮亞傑的實驗研究 (Piaget & Szeminska, 1952) 發現幼童對數的了解與推理有三個發展階段：第一階段 (四歲左右) 幼童對數量的概念是無法了解的，因為幼童無法用一對一的關係去判斷兩組數量相等的實物；第二階段 (五至六歲)，是過渡時期，會運用一對一對應關係建構同等數目。第三階段 (六歲半以後)，對數概念能真正理解的階段，幼童已能用各種方法建構同等性，例如：用數的，或用一對一對應方式，並且也能保留數目之不變性，不管外觀安排如何變化，都不會影響實物相等的判斷。可知第一、二階段的幼童深受知覺的外觀所影響，在作數量判斷時是根據其整體外型來決定 (周淑惠，1999)。因此根據皮亞傑認知發展，幼童的數量推理在較小的幼童，只能看著實物依靠數數來比較數的大小，還沒有建立起抽象數的順序與數的大小的明確關係。五歲半以後，一般幼童都能較順利地比較 10 以內數的大小。

然而，近來的研究發現，早在學前階段的幼童就有數的概念，如量的評估、比較大小，簡單的加減法，這些都不需要教就會的，而在五歲這個階段時是一個大的突破，也就是在他們進入正式教育之前，數概念已發展的很好。尤其，他們可以不經過數數而能得知數量的大小 (Sophian, 2000b)。不過有的研究更早的發現，嬰兒三個月大就會分辨數量，沒有經符號的學習或是數數，就能在一定比例下進行比較。隨著年齡的成長，比例差距愈小時，其準確度愈高 (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004 ; Xu, 2002 ; Xu, 2003b; Xu, Carey, & Quint, 2004, Xu, 2005 ; Lipton, & Spelke, 2006; Sophina, 2000a)。同時，學者研究中指出，嬰兒只要能掌握對應的關係，就可以做數量的比較 (Sophina)。故由上述的研究可知，早在嬰兒時期就有數量概念，五歲的幼童在數量概念的發展上必定更成熟，而大於五歲幼童，在數量的表現上，更能符合學者的研究發現。

三、幼童的數量推理與大小比較

幼童的數量推理能力指幼童能把物件的集合看作一個整體 (集合體)，再對這個整體作估算，並判斷大小。幼童比較數量大小的能力比計數能力發展要晚一些。據研究，最初

給幼童幾個物件，幼童看到的只是一個單個的物件，還不能把它們看作一個整體。隨著數的認知發展成熟，幼童逐漸能把它們看作一個整體，數出它們的個數。在點數物件的過程中，也開始知道一個聚集量或一組的數量由若干個組成的，這樣推理過程，形成幼童的整數概念，並發展出邏輯性的推理能力 (Fusion, 1992; 劉秋木, 2006)。

在 Pike, Forrester (1997) 發現幼童對較大數量相對大小的理解，會影響他們在數學方面的估算能力。而比較數量大小的研究，近來被大量的用來探討內在表徵及符號大小的運作，如判斷兩個數連續量中那一個比較大 (Turconi, Campbell & Seron, 2006)。

一般幼童的推論數量能力發展是數數的基礎。幼童要有數字概念之前，先用數量的對應關係比較數量的差異 (Sophian, 2000b)。然而，近來的研究發現，數量概念的發展不需要數字符號，幼童也可以作數量的比較，甚至會分辨不同數量的大小 (Xu, Spelke, & Goddard, 2005)。在先前的研究中，很多的研究專注在嬰兒對數量的比較，若以數量比例多少來說，大部分的研究設定六個月的嬰兒能判斷 1 : 2 數量的大小；Xu, Spelke, Goddard (2005) 以視覺空間呈現大的數量時，探討嬰兒是否根據比例來判斷數量大小 (16 : 32 但不是 16 : 24)，研究結果顯示在控制的條件下，嬰兒可以分辨 1 : 2 的數量大小，但無法分辨 2 : 3 的數量比較。然而，在小的數量上，六個月的嬰兒，可以分辨 1 : 2 排列數量，但無法辨 2 : 3 數量比較出大小；十個月大的嬰兒小數量的分辨中，嬰兒能辨出物體 8 個比 12 個 (2 : 3) 的大小，但無辨別出 8 比 10 (4 : 5) 的物品大小 (Xu & Arriaga, in press)。

再者，McCrink 與 Wynn (2004) 的研究中，發現九個月的嬰兒透過數字系統，在控制的連續量（面積、長度）中，已會有大數量加減的能力，這樣的研究支持嬰兒擁有數量的概念，並能估算數量。進一步 Slaughter, Kamppi, Paynter (2006) 探討三歲的幼童在韋伯定律（1 : 2 比例）下，數量漸增時幼童可以估算大的數量及作減法的計算。三至五歲的幼童受到數量距離影響 (Distance Effects) 很容易分辨出 1 : 2 的數量大小，但很難區辨出 2 : 3 的數量。另外，Hunteny-Fenner (2001) 指出 5 至 7 歲的幼童，可以在一定的比例下，分辨出五項佈滿整個面積，隨機擺放物品的數量。雖然人類可以有數感，但以物品二度空間的數量的作表徵及比較，還得依靠數量的比例作判斷 (Xu, Spelke & Goddard, 2005)。因此，可以確定的是幼童在五歲之前，數量的估計能力視認知系統而定。

另外，在視覺影響幼童數量判斷上，幼童會受物件面積、形狀分佈的稠密的影響。Piaget 認為物件的外形會影響幼童數的守恆概念，例如，皮亞傑把一行木片排得密一些或稀一些，讓兒童去判斷多少，他發覺兒童需要六歲半到七歲才知道總數量不變。在六、七歲以下的幼童基本上在判斷數量多少時，是受到視覺因素影響 (Piaget & Szeminshk, 1952)。

Sophian (2000a) 指出年紀愈大的兒童，他們對數量的推論能力愈不受物品大小影響。她讓三至五歲的幼童以不同數量及大小形狀的餅干作聚集量的推測，發現五歲的幼童比三歲的幼兒較能正確的判斷數量。且 Sophian 曾運用數的守恆概念，讓兒童比較並排的二組數，看相等持續數量排列的長短是否影響兒童對數量的判斷？但測量之後，發現如果用面

積讓兒童排列數量作比較時，發現兒童會思考物體排列的面積及物體本身的大小。再就物件排列在相同面積時，她發現幼童只會看到單一的面如看到長或寬，而不是同時看到兩個向度，若比較相同面積的長方形與正方形，幼童認為長方形比正方形大，而排列在長方形的物件數量比排列在正方形的物件多。因此，探討幼童在不同數量比例中，作數量比較時，需要考慮視覺空間的排列如物品外形大小、散佈的密度（物品間的距離）及放置的面積。

相關研究中指出，三歲的幼童會背誦六以下的數字，也瞭解數的意義，但他們在數的過程中，不太理解所表示數的大小或者也只是片片斷斷的理解。四、五歲幼童大都進入數概念開始形成階段，能點數數量不多的物體，並說出計數的結果，且能初步掌握一些數的順序和大小。在四足歲之後，精通小於 20 的最小的數字；5 歲時幼童可以數高於 20 的數，且標示出數字及非符號的約略數的大小 (Siegler & Opefer, 2003)。在幼童數數的範圍內，幼童有大數及小數概念的產生，也意味著幼童能標示出非符號數的大小的數字 (Lipton & Spelke, 2005)。此外，Lipton, Spelke (2006) 的實驗中，把一堆 20 到 120 不等數量的物品排列出來，讓幼童評估，再提供數字卡，叫幼童指出物品數量的數字。研究證實在學前階段 5 歲的孩子即未接受正式教育之前或獲得計算技能之前，孩子已經擁有符號的系統表徵數字。

由上述的文獻得知，處在幼稚園階段的幼童，他們的數量認知發展如皮亞傑理論所論及的，數量的概念是較慢才發展出來，但也如近年來的研究卻發現，幼童數量的概念卻早已具備。這兩種的論說都有實證支持，本研究想進一步以台灣及不同族群的幼童加以探究，瞭解他們數量概念及推理能力的發展情形。再者，上述的學者的研究中，提到數量推理可以不必經由一對一的對應方式計數，就可以估算數量的大小，很明顯的，這些研究跟皮亞傑實驗的結果不同，本研究擬設計較大的兩數量，而比例接近時，在操控的條件下，如兩數量陳列的面積、物件的大小，是否如學者所發現幼童能作數量的推理及比較？且不同族群幼童在這方面的表現，顯示出共同性與差異性，本研究將以研究設計、討論與結果來呼應這些問題。

參、研究設計

根據上述的文獻及研究目的來瞭解幼童數量推理的情形，除研究者參考 Sophian (2000a; 2002)、Xu, Spelke (2000 ; 2005) 等人的實驗研究外，也考量到幼童正處在前運思期，故設計實作評量，提供刺激物讓幼童作數量推理。因此，本研究的方法採實作評量及觀察訪談來達成目的。研究評量分成兩階段，評量的設計中刺激物的數量比例相近，第一階段先給予幼童實物作數量的推估比較，再經三個月之後，再給幼童半具體物件作數量推理。評量中，先操控刺激物的三個變項如物件的大小、物件的數量 (20、24、30) 及物件陳列的面積，來測幼童數量的推理能力。之後，將評量的結果加以量化，並以統計 SPSS 軟體作資料分析，以瞭解幼童在數量推理方面的表現；研究者除將評量結果加以統計分析

外，研究者也採用觀察、記錄及訪談，針對研究對象在施測前、施測過程中對刺激物的反應、幼童答題的策略及幼童完成評量後的態度，以瞭解幼童的數量推理。

一、研究對象

研究對象以幼稚園大班的學生為主，研究對象包括台灣公、私立幼稚園大班各二十位學生。公幼的學生是由一所國小附設幼稚園，從三個班級中抽樣而來，而私幼是由一所大學附設幼稚園中三個班級中抽出二十名大班學生，男女各半；至於美國學生的樣本來自美國夏威夷州附設小學幼稚園二十名學生，夏威夷學生是由二所小學隨機抽樣而來，其中一所是夏威夷州立小學的附設幼稚園，乃是從五個班級中抽出十名學生，而另外十名學生是從一所大學實驗小學附設幼稚園，是一所 charter school（私立）的幼稚園抽出十名。幼童平均年齡 5.5 歲，男女各半。由於夏威夷州是屬於多族群居住的地區，因此，抽樣的幼童包含有日本人、韓國人、美國人、菲律賓人（日本與韓國幼童會說英語，施測時研究者仍用英文與他們對談）。然而，本研究目的在比較族群數量的推理能力，本研究的族群指把台灣與夏威夷的幼童分成不同群體作比較，另外，也把台灣公、私幼童因學習環境不同，當作不同的群體作比較。

二、實作評量

（一）實作評量信度、效度

研究者設計實作評量分成實物及半實物評量，在施測過程中便利記錄，把將評量內容編成量表 A 及量表 B，而這些量表主要是供施測記錄用。兩評量的物件數量有 20、24 及 30 個，這些數量大小的安排是根據文獻所提，幼童比較數量能力範圍所及。量表的編製前，研究者先參考研究文獻、詢問幼教師及學者有關幼童數量概念的看法，再綜合他們看法發展出專家效度來評量。評量信度方面，以內部一致性係數來了解各量表在內容取樣上的一致性 ($N=200$ ；Cronbach α ，評量 A $\alpha=.80$ 、量表 B $\alpha=.75$)。效度部分，由研究者與夏威夷大學的心理學者 Catherine, Sophian、數學教育專家討論試題的合適性之後，再邀請專家、數學教師審察題目，提出意見討論後，進行修改以建立專家效度。發展量表的過程中也針對幾個幼童作先導研究，先認識幼童數量的推理情形。

（二）評量過程標準化

評量 A 的目的在瞭解幼童對具體刺激物的數量推理能力。內容物有玩具模型如動物、水果及貝殼，評量變項的控制以大小、數量變化為主；評量 B 的目的在測幼童對半具體的刺激物的推理能力，內容是以卡通貼紙的魚、烏龜、青蛙及蘋果等圖案為主，評量的變項以物件大小、物件陳列面積及數量的比例。兩階段的評量數量安排皆採用 2：3 與 5：6 數量的兩種比例。

設計的兩階段的評量有標準化的過程。在第一階段評量 A 實物施測時，物品排列的方式，把十六樣物品排列在大桌面上，每一樣物品分散在 30 公分長、21 寬長方形的面積

上，由幼童推測解題，每一題有兩組物品，同組內的物品大小相同，相對組物品大小不同。施測時，先依亂數表排出順序，決定由那一題先開始測。

第二階段評量 B 半實物施測，內容物如青蛙、魚、熊及蘋果等貼紙排列成長方形或橢圓形貼在 26 公分長 20 公分寬長方 A4 的紙上，物件排列的空間距離加以控制。刺激物品的選擇以清楚呈現數量，並吸引幼童，讓他們願意接受評量。評量表上，共有十二題，每一題包含兩組的數量，左右並列，放在可以展開的三孔資料夾上，當測試時，一打開資料夾，幼童就可以清楚看到兩組物件的內容及數量（附件一）。每一題施測要先從小的數量或先從較大的數量開始時，則由亂數表來決定編排的順序，評量中作答方式因不用紙筆，而是由幼童口述完成，每一項目答對者得一分，答錯則以零分計。

(三) 評量工具內容

評量 A 的實物包含小貝殼 (shell)、小鈴噹 (bell) 及塑膠魚 (fish)、粉紅色鳥 (bird)、藍色鳥 (blue bird)、蘋果 (apple) 及熊 (bear)，因為這些實物模型會吸引幼童。

表一、評量 A- 實物評量物品大小

1. 20 魚 (2.5 x 2 x 0.5) 公分	vs.	30 藍鳥 (4 x 3 x 1) 公分
2. 20 青蛙 (2 x 1.5 x 0.8) 公分	vs.	30 蘋果 (直徑 8 公分 x 2 公分)
3. 20 粉紅鳥 (2x 1.8 x 0.5) 公分	vs.	24 熊 (2 x 1.8 x 2.5) 公分
4. 20 貝殼 (1.3 x 0.8x 0.8) 公分	vs.	24 鈴噹 (直徑 5 公分 x 1.8 公分)
5. 20 熊 (2 x 1.8 x 2.5) 公分	vs.	30 粉紅鳥 (2 x 1.8 x 0.5) 公分
6. 20 鈴噹 (直徑 5 公分 x 1.8 公分)	vs.	30 貝殼 (1.3 x 0.8 x 0.8) 公分
7. 20 藍鳥 (4 x 3 x 1) 公分	vs.	24 魚 (2.5 x 2 x 0.5) 公分
8. 20 蘋果 (直徑 8 公分 x 2 公分)	vs.	30 青蛙 (2 x 1.5 x 0.8) 公分

評量 B，每一題有兩種不同的物品，物品的大小 (size) 不同，各組的數量不同，有的物品名稱相同，但種類有時不同，如魚的貼紙；排列時，不同類的魚、烏龜、蘋果、熊，青蛙等，這些貼紙的大小及圖案每組會不同。

表二、評量 B- 半具體物品件的評量

1. O20 魚 (1.8 x 1) 公分	vs.	R24 青蛙 (2.5 x 2) 公分
2. O24 魚 (1.4 x 1) 公分	vs.	R20 烏龜 (1.8 x 1.2) 公分
3. R20 蘋果 (1.6 x 1.2) 公分	vs.	O24 烏龜 (1.8 x 1.2) 公分
4. O30 魚 (1.5 x 2) 公分	vs.	R20 蘋果 (2 x 1.5) 公分
5. O30 熊 (2 x 1.5) 公分	vs.	R20 魚 (1.8 x 1) 公分
6. R20 青蛙 (2.5 x 2) 公分	vs.	O30 烏龜 (1.8 x 1.2) 公分
7. R24 魚 (1.5 x 1) 公分	vs.	O20 青蛙 (2.5 x 2) 公分
8. O20 熊 (2x 1.5) 公分	vs.	R24 烏龜 (1.8 x 1.2) 公分

9. R24 蘋果 (2 x 1.5) 公分	vs.	O20 魚 (1.5x 1.3) 公分
10. O20 烏龜 (1.5x 2.2) 公分	vs.	R30 魚 (1.5 x .8) 公分
11. O20 魚 (1.5 x 1) 公分	vs.	R30 蘋果 (2 x 1.5) 公分
12. R30 青蛙 (2 x 1.3) 公分	vs.	O20 熊 (2 x 1.5) 公分

O：面積是橢圓形 R：面積是長方形

(四) 施測

1. 施測前

在施測前及施測的過程中，會讓幼童先明白施測的要求，才讓幼童接受施測。在評量之前，先瞭解幼童數數的能力，確認他們從 1 數到 30，且不會跳數，已具有數的概念。

在正式施測前一個月，研究者先安排實物施測，共有六題，每一組之間數量大小 1：2、2：3、5：6，形狀差距大，物品的稠密度加以控制。目的在讓幼童在施測前先熟悉評量的方式。而且施測前，施測者會讓幼童說出施測的物件有那些東西，再跟受試者說明施測的規定，如比較的過程中，要求幼童說出或指出那一組的數量較多，但不能數，只能目測。

2. 正式施測

對每二十名施測的時間需要花二小時，實物施測的部分，花費的時間多於用貼紙施測的時間，在實物施測上，每位學生至少要花五分鐘完成施測，而貼紙大約 3 分鐘的時間。

3. 施測後

研究者要求幼童接受評量之後，不可以告訴等候受試者，也不要影響到別人的受試。因為孩子測完之後，會口耳相傳。

施測後，再把資料鍵入 Excel，然後，再用統計軟體 SPSS 的變異數分析及 T 考驗，探討族群是否呈現解題上的差異性，以及幼童在數量推理的情形。測量結果為易於作解釋，把總分數轉成百分比的答對率，且在表三及表四上，列出平均數作對照。

肆、研究結果與討論

兩種評量施測的結果，顯示幼童在評量 A 具體物件數量的推理上，答對率超過 70% 以上，表示一般幼童對實物數量推理已很好的表現，而且台灣公私幼學生的表現相當，經 ANOVA 考驗後，未呈顯著差異。由表三顯示，在評量 A 的表現上，夏威夷學生與台灣學生之間數量的推理能力，並沒有因不同的族群，在實物數量的推理上，有顯著差異。以夏威夷學生及台灣公幼評量整體表現作統計 F 考驗， $F=1.767$ ； $M_{夏}=7.00$ ； $M_{台公}=7.605$ ； $M_{台私}=7.450$ ； $p>.05$ ，同時，他們在數量的推理能上，兩地的幼童在辨別實物的數量上，至少每題答對的正確率可達到 75% 以上。可見，幼童在這方面的判斷高達百分之七十五以上，顯示在幼稚園階段的幼童在具體實物的數量推理能力已發展良好。雖然，兩地幼童

不因爲族群在數量的推理上有差異，但如再進一步從平均數的數據顯示，台灣學生的答對率高於夏威夷的學生，就總答對率而言，夏威夷的學生總答對率有 87.50%，而台灣學生的總答對率有 94.34%。

表三 評量 A 夏威夷幼童接受實物評量結果

變項	學生	人數	平均數	標準差	F 值	P 值
1.20 魚 - 30 藍鳥	夏威夷	20	.90	.308	2.111	.130
	台灣公幼	20	1.00	.000		
	台灣私幼	20	1.00	.000		
2.20 青蛙 - 30 蘋果	夏威夷	20	.90	.308	2.111	.130
	台灣公幼	20	1.00	.000		
	台灣私幼	20	1.00	.000		
3.20 粉紅鳥 - 24 熊	夏威夷	20	1.00	.000	0	0
	台灣公幼	20	1.00	.000		
	台灣私幼	20	1.00	.000		
4.20 貝殼 - 24 鈴當	夏威夷	20	1.00	.000	1.00	.347
	台灣公幼	20	1.00	.000		
	台灣私幼	20	.95	.224		
5.20 熊 - 30 粉紅鳥 bird	夏威夷	20	.75	.444	.919	.405
	台灣公幼	20	.90	.308		
	台灣私幼	20	.75	.224		
6.20 鈴噹 - 30 貝殼	夏威夷	20	.75	.444	.821	.445
	台灣公幼	20	.85	.366		
	台灣私幼	20	.90	.308		
7.20 藍鳥 - 24 魚	夏威夷	20	.80	.410	.377	.687
	台灣公幼	20	.90	.308		
	台灣私幼	20	.85	.366		
8.20 蘋果 -30 青蛙	夏威夷	20	.90	.308	2.111	.130
	台灣公幼	20	1.00	.000		
	台灣私幼	20	1.00	.000		
9. 總合	夏威夷	20	7.000	1.622	1.767	.180
	台灣公幼	20	7.650	.812		
	台灣私幼	20	7.450	.686		

* P<.05 ; ** P<.01 ; *** P<.001

在評量 B 半具體物件的測量，經統計軟體變異數分析，從整體答題的變異來看，三類的學生數量的推理表現有顯著的差異，F 值 13.83，p<.05，夏威夷的學生的總答對率

55.%；台灣公幼學生的總答對率 70%，台灣私幼學生 74.58%。再就同族群中，用 T 考驗檢測台灣幼童推理能力有無公、私立的差異，則 $t = 1.132$ ； $p > .05$ ，幼童在數量上的推理表現上，發現公、私立幼稚園的學生在總變異中並沒有顯著差異，表示台灣公、私幼稚園的幼童，在數量推理能力是相當的。

然而，各題之間，出現最大差異的題目是在第一、三、九題，在兩數量 5：6 比例下，幼童的數量辨識有顯著差異， $F_1 = 3.56$ ； $F_3 = 9.82$ ； $F_9 = 3.30$ ， $p_1 < .05$ ； $p_3 < .001$ ； $p_9 < .05$ 。以下再就施測過程中所呈現的，再就幾個層面加以討論。

在半具體物品施測下，發現幼童在第一題，除了在面積大、物品小；數量多面積小；物品大、數量小的 5：6 比例時，兩地學生的差異性達到顯著，而且以夏威夷的學生在這個比例下，答錯率高於台灣的學生。可見數量比例愈近時，夏威夷幼童的數量推理的能力降低。

表四、評量 B 幼童接受半具體物件評量結果

變項	學生	人數	平均數	標準差	F 值	P 值
1. R 20 魚 - O 24 青蛙	夏威夷	20	.20	.410	3.562	.035*
	台灣公幼	20	.60	.503		
	台灣私幼	20	.40	.503		
2.O24 魚 - R20 烏龜	夏威夷	20	.25	.444	1.332	.272
	台灣公幼	20	.40	.503		
	台灣私幼	20	.50	.513		
3.R20 蘋果 - O24 烏龜	夏威夷	20	.10	.308	9.815	.01**
	台灣公幼	20	.35	.489		
	台灣私幼	20	.70	.470		
4.O30 魚 - R20 蘋果	夏威夷	20	.50	.513	.257	.774
	台灣公幼	20	.40	.503		
	台灣私幼	20	.50	.513		
5.O30 熊 -R20 魚	夏威夷	20	.70	.470	.640	.531
	台灣公幼	20	.70	.470		
	台灣私幼	20	.55	.510		
6.R20 青蛙 -O30 烏龜	夏威夷	20	.35	.489	2.556	.086
	台灣公幼	20	.50	.513		
	台灣私幼	20	.70	.470		
7.R24 魚 - O20 青蛙	夏威夷	20	.75	.444	1.572	.216
	台灣公幼	20	.85	.366		
	台灣私幼	20	.95	.224		

8.O20 熊 - R24 烏龜	夏威夷	20	.65	.489		
	台灣公幼	20	.90	.308	.177	.059
	台灣私幼	20	.75	.444		
9.R24 蘋果 -O20 魚	夏威夷	20	.65	.489		
	台灣公幼	20	.85	.366	3.304	.044*
	台灣私幼	20	.95	.224		
10.O20 烏龜 - R30 魚	夏威夷	20	.70	.470		
	台灣公幼	20	.85	.366	2.344	.105
	台灣私幼	20	.95	.224		
11.O20 魚 -R30 蘋果	夏威夷	20	.90	.308		
	台灣公幼	20	1.00	.000	2.111	.130
	台灣私幼	20	1.00	.000		
12.R30 青蛙 -O20 熊	夏威夷	20	.85	.366		
	台灣公幼	20	1.00	.000	3.353	.042*
	台灣私幼	20	1.00	.000		

* P<.05 ; ** P<.01 ; *** P<.001

一、數量的推理

幼童在數量推理因受到認知發展上的限制，在作數量大小的辨識上，受到物件大小及陳列的面積大小影響，因此，數量的推理受到視覺判斷影響。

(一) 作答思考時間

在施測的過程中，發現當幼童思考時間太長或太短時，答錯題數多，平均答對題數在50%以下。當幼童接觸半具體物件評量作業時，面對第一題時，幼童在數量推理的表現有所不同，推理能力好的幼童，起先會花稍微長的時間作判斷、再解題，如大部分的幼童平均每一題用十五秒以上時間解題；然而推理能力較差的幼童未超過十五秒再作答，通常這些較快速答題的幼童，只看完一組的數量就提出答案，而不再比較另一組，所以錯的機率高；另一種數量推理能力較差的幼童在判斷時，每一題都花較長的時間（二十五秒以上時間），以較長的時間去看其中一組而忽略掉另一組的數量就答題。

(二) 視覺影響推理

相關的研究中提到物件大小 (size) 會影響幼童對數量的判斷，在量表施測的過程中，很明顯的，當幼童在數量小、物件大與數量多、物件小的情形下作比較時，幼童犯錯的機率高，如在量表實物的施測上，第五、六、七題中的物件如熊、鈴噹、藍鳥都是數量少而體積大，相對組的粉紅鳥、貝殼、魚是數量多而體積小。評量結果顯示兩地學生的答對率

降低，夏威夷學生只有 75%、75%、80%；而台灣學生的答對率 90%、85%、90%，不像其他的答題可以達到 100%。

當進入半具體物件數量比較時，幼童會受到物件形狀的大小影響其推理。如第二題為例，烏龜的面積大（1.8 公分 x 1.2 公分）數量少（20 隻），但魚的面積小（1.4 公分 x 1 公分），但數量多（24 隻），在這一題幼童的錯誤率最高，夏威夷的幼童只答對 25%；台灣公幼學生答對 40%；台灣私幼學生答對 50%。另外，第六題的情形也是如此，30 烏龜對 20 青蛙時，因為烏龜面積小（1.8 公分 x 1.2 公分），但數量多，而青蛙面積大（2.5 公分 x 2 公分）、數量少，學生認為青蛙的數量比較多，夏威夷的學生答對 35%；台灣公幼的學生答對 50%；台灣私幼的學生答對 70%。因此，顯示幼童在數量大小的比較上，幼童會受到他們對物件的知覺的影響，亦即幼童本身對物件大小的視覺，影響到他們對數量的判斷，換句話說，幼童的判斷，基本上是根據物件的外觀作推理，而非依照實際物件的數量來判斷。這階段幼童認知發展，物件外形大小會影響到他們在評量數量多少的準確度。然而，台灣學生在這方面的判斷上，比較沒有像夏威夷學生受到物件外形大小影響。因此，視覺因素會影響夏威夷幼童數量判斷。

（三）空間稠密與數量比例

間距效應是影響到幼童數量推理的因素之一。在研究設計中，控制物件之間的距離，如把物件在 A4 紙上排列成長方形及橢圓形，使物件間的距離相等。但因物件數量多少會影響到排列空間的稠密度，如在相同面積陳列三十或二十個不同數量的物件，前者的空間距離會較後者稠密。如進一步探討物件排列的形狀是否也會影響到幼童數量多少的判斷？研究發現當物件陳列成長方形時，儘管橢圓物件的數量多於長方形的數量，幼童會認為長方形排列的數量大於橢圓形陳列的數量。

幼童在評量 B 表現上，數量比例愈接近，又受視覺影響，則幼童判斷數量時最易犯錯，幼童在 5:6 下，其表現較不如在 2:3 的數量推理好。但是在 5:6 下，當陳列在長方形物件多於橢圓形的物件時，幼童反應又不同。如第一題長方形 20 魚比 24 橢圓形青蛙時，而幼童判斷魚多於青蛙，這一題的總答對率只有 40%，夏威夷的學生只答對 20%；台灣公幼學生答對 60%；台灣私幼學生答對 40%，這些答對率比起第七題長方形 24 魚比橢圓形 20 青蛙，在七題幼童的總答對率有 85%。夏威夷學生達 75%；台灣公幼 85%；台灣私幼 95%。因為第七題的長方形的數量比橢圓形的數量多，幼童較容易判斷。然而，幼童在數量 5：6 的比例下，即數量比例接近時，幼童認為為長方形排列物件數量較多，所以，幼童在這方面數量推理的表現上差距最大。更甚者，即使在物件數量 2：3 的比例下，幼童的正確的判斷率也不高，因為當物件排成長方形時，幼童認為數量多，例如第六題長方形 20 青蛙對橢圓形 30 烏龜，幼童的總正確率只有 52%。夏威夷幼童正確判斷率只有 35%；台灣公幼的學生 50%；台灣私幼的學生達 70%。

由此可知，研究發現與上述文獻相符之處，幼童受到物件空間距離及分佈面積的影響。當物品數量的比例愈接近時，其答對的比率降低，且幼童數量的推理容易受物件陳列

的稠密干擾，他們誤以為排列在長方形物件的數量會比排列在橢圓形物件的數量多，儘管排列在長方形的物件數量較少。

二、不同族群幼童數量推理表現

(一) 共同模式

幼童的數量推理方式是否因不同族群而有所不同？根據本研究所得的結果發現，不同族群在數量推理的表現上，雖未呈現差異，但是在數量認知發展上，符合階段性中的共同模式。幼童而在數量認知發展共同的模式下，幼稚園階段的幼童對具體事物推理的能力已發展成熟，在具體物件的數量推理表現上，夏威夷與台灣的學生答對率都可以達到 75% 以上，表示這階段的幼童，超越皮亞傑所提出的前運思期幼童的認知發展，而證實近年來的研究認為數量的推理在嬰兒期已發展出來，隨著個體的成熟因素，數量的推理能力表現愈純熟。

至於在半具體物件的評量上，兩地幼童的表現則低於在具體物件評量上的表現，顯然，處在這階段的幼童，在半抽象物件的推理上，仍然受到其認知發展的限制，大致上，幼童仍會受到「集中化」影響，不能見及事物的全面作推理。

(二) 族群表現差異

在施測前，夏威夷的幼童反應很熱烈，當他們被通知按照順序接受評量時，幼童迫不及待的彼此督促動作快一點，班級老師還得負責維持秩序，好讓研究者順利進行施測。當幼童接受個別施測時，另外在施測現場外圍的幼童們會討論，並好奇的探頭看被施測者作答，在等候的過程中充滿好奇心。同時，他們對施測結果的反應也很積極。夏威夷的幼童對解題的結果很在意，在一對一測試結束後，他們會留下來問研究者他們的表現如何？個人答對多少題？而真正的答案是什麼？如問：「我全對了嗎？」或者他們不會馬上離開施測現場，反而開始比較個人與他人作答結果。然而，台灣的幼童施測前會感到好奇，認為要玩一個新遊戲，但不是很迫切的急於知道是什麼遊戲，如果手上有工作要完成，他們仍留在原處繼續工作，直等到老師叫他們來受測試，才停止工作。跟夏威夷幼童很大不同，是台灣的幼童測試完畢之後，認為已經完成一件事，對自己表現的結果不會刻意去詢問，接受完測試之後，只會問：「好了嗎？我可以出去玩了嗎？」他們認為已完成大人交代的事，對於答對或答錯多少題並不關心，這是在施測過程可看出夏威夷幼童與台灣幼童對測試態度的不同。

另外，幼童解題探究的態度也有不同。在實物施測過程中，夏威夷的學生，看到實物之後，會先對每種物件把玩幾秒之後，才接受施測，而在貼紙的部份也會先對每一樣物件「命名」之後，如 "Ow! This is Nimo" (卡通魚)，才會開始針對兩組數量大小作比較。相對的，台灣的幼童，在施測的過程中，物件對他們的視覺刺激不大，他們只等候接受評量，不問物件的內容，或對物件加以觸摸。這不同點在於夏威夷的學生會在摸索物件當中及命名中，把物件加以歸類，找出分類的訊息來解題，而分類是幼童數概念建立的先備能

力之一，因此，台灣幼童在接受施測時，對於數量訊息的掌握及針對數量特質的瞭解，不像夏威夷學生敏銳與積極。因此，值得探討的是這種探索的態度是否應在台灣幼童學習數學過程中加強？

(三) 不同解題類型幼童表現

經由觀察幼童解題方式，探討他們如何運用解題策略，把所施測的幼童依照答對題數分成三類：第一類是解題高手，即在量表 B 上答對 90% 以上，大約只錯一題。第二類是答對 58% 以上，即答對七題至九題，第三類是 50% 以下，即答對一半以下，而這三類的幼童在解題過程中，有不同的解題策略。

第一類的幼童，當訪問六位（三位台灣、三位夏威夷男生）施測完的幼童：「你為什麼這麼厲害可以答對這麼多題，可不可以告訴我？」台灣小朋友很有信心的回答：「因為我有看準它的圖呀！」；同樣有一個幼童回答：「因為我有看圖！」表示這類幼童在解題的過程中，已學會用表徵的方法解題，把數量多少化為抽象的符號，然後轉化成圖 (Picture)，再依據圖的大小作解題。就如上述文獻所提幼童會把數量大小化為內在表徵及符號，判斷兩個數量中那一個比較大 (Turconi, Campbell & Seron, 2006)。

另二位台灣女幼童，當問她：「妳怎麼那麼厲害，這麼快就可以看出來哪邊比較多？」她們很高興的回答：「因為有的動物比較小，所以黏的比較多！」，而夏威夷的二位男幼童，其中是一位韓國幼童，他在量表 B 的解題策略，也是用這種方式推論數量的多少，會指著排列的物件說：「因為這一排比較多，那邊的一排比較少」，他用一排佔數量多少來推測全部的數量，顯然這類型的幼童，他們的解題策略，不受物件外在形狀大小影響，而是以物件所佔的空間來推算一行或一列的數量多少？這些幼童的推理能力已具有小學二年級以上的推理能力 (陳埤淑, 2007)。可見數量推理能力高的幼童在解題上，所用的策略是相似的。

第二類的幼童在解題的策略上，他們學過數字，憑著對數字的認識來解題。有兩位答對九題的學生，其中有台灣三位女幼童被問：「你怎麼那麼厲害，這麼快就可以看出來哪個比較多？」她們會說：「我只是練習 1.2.3 而已。」台灣另一位男幼童被問同樣問題時，他的回答：「因為我每天都有寫 1.2.3 啊！」，另外，其中有一位答對七題的台灣幼童回答：「因為我有在功文練習數學，有比較」，這位幼童也用先前的學習數的經驗解題。同樣的當研究者訪問他們如何判斷那一組數量多？那一組數量少時？夏威夷的三位幼童回答：「因為我學過數數 (I have learned how to count)」。這類幼童的解題方式是，應用他們所學的數字作為數量推理的工具，用系統表徵的數字推估物件的數量。

至於第三類幼童是尚未發展出解題策略，有的幼童答題只憑著直覺。當訪問其中的一位女幼童：「妳這麼快就可以看出來哪邊比較多？」她說：「因為我用精準」。問她：「可以跟我說什麼是精準嗎？」她說：「媽媽有教我用精準啊！是心算（手同時比向心臟的部位)」。另一種，不用任何的策略，直接答題，如果問她怎麼看出來數量多少，她們的回答：「不知道！」。再者，訪問五位夏威夷的幼童（原居民），當問他們：「你怎麼知道這邊

比較多？」他們會說：「就是這樣！」因此這類的幼童在數量的推理上尚未運用策略來解題或是不知道如何在心智上形成判斷數量的策略解題，比起上述兩類的學生，得知數量推理答對率高的幼童會使用策略來解題。

由上述的研究結果得知，幼稚園階段幼童的數量認知發展超越皮亞傑理論所論及的，幼童數量的概念卻早已具備。再者，文獻中談到在學者的研究中發現，幼童數量的推理可以不必經由一對一的對應方式計數就可以估算數量的大小，很明顯的，本研究中評量過程中並沒有讓幼童去作點數的動作，而幼童卻可以估算出兩組數量的大小，因此，此論說可得到支持。

另外，在較大的兩組數量比例接近時，在操控的條件下，如兩數量陳列的面積、物件的大小，幼童必須運用策略來判斷兩組的數量，例如，有的幼童會降低間距效應，依據物件的多少來估算數量的大小，並且掌握物件占空間的稠密度作判斷，由這點更可以知道，第一類的幼童數量的認知推理能力已發展成熟。

再者，有關族群的比較下，可以發展基本的推理能力，如在實物的評量上，沒有顯示因族群不同而有數量推理能力上的差異，但進到在半抽象數量推理時，當數量比例接近時，台灣幼童的數量推理能力優於夏威夷幼童；至於台灣公幼與私幼的幼童在數量的比較上，從研究結果統計分析顯示，兩者之間並沒有顯著差異。

陸、結論與建議

由上述的結果討論得知，幼稚園的幼童在數量發展方面，仍有共同的發展模式，也就是前運思期的幼童，在具體實物的辨識上大致發展成熟，對實物數量的推理上，較容易辨識出數量的多少。同時，這方面也沒有族群差異的現象產生。

但是在半抽象的數量概念發展上，幼稚園的幼童有的仍處在知覺「集中化」的階段，判斷數量時，只憑知覺所見的單一面的事實作推論，容易受到物件大小、間距效應影響，無法作多元的思考，如當物件排列成長方形時，面積大數量小時，幼童認為長方形的數量比較多，因此，影響到他們的數量推理的能力。

就不同族群的數量推理表現而言，研究結果呈現在半具體物件的辨識與估算上，在幾個項目的施測中，顯示出族群的差異，當數量比例接近時，台灣幼童的表現優於夏威夷幼童。但是在推理過程中的解題態度上，則有所不同，夏威夷的幼童比台灣的幼童較積極的探索。

再依據研究結果發現，兩地的幼童在數量認知的發展上，有的幼童已經超過皮亞傑認知發展論中所提及的現象。如解題能力高的幼童發展出解題的策略，因此，他們在數量的推理能力上，已超越年齡提早發展。

由於幼童數量推理發展有上述的特色，本研究提出教學的建議，即在數量的學習上，培養幼童數概念最好的方法，就是讓幼童有機會使用他們所選擇的方式來操作實物；幼童在未發展出數的先備概念前，不強行教算術，否則幼童僅學會記憶。所以操作具體的實物

才是他們學數學的任務。而且處在前運思期的幼童，數的意義必須建立在具體操作上，從操作中才能理解數量之間的大小關係，透過表徵系統與數作連結。因此，教學上，最好的方法就是運用幼童的前置經驗或生活經驗來學習，例如，幼童比較數量時喜歡用對應的方式來判斷，就讓他們在這方面有多練習的機會，同時，教學中多以幼童生活中所接觸到的事物作比較，使數的學習更具意義化。

另外，在幼童作數量比較時，當作錯時應給予回饋，給予思考的機會，而且必須給予最迅速的回應，並讓幼童測後知道正確的答案，如此，才有助於幼童清楚數量概念的形。因此，幼童數學教育最根本在於概念的啓發與教學。教學應從幼童的數量概念教起，或設計有關的數量活動促進幼童的認知發展，幫助孩子有興趣的學習。而不是在數學啓蒙教育中，只強調記憶背誦甚於操作及推理思考，這樣反而會導致幼童失去學習數學的興趣，或讓孩子在紙筆學習單的反覆記憶練習上，應給予幼童從事教育性的活動，讓他們有探險、檢驗、測量、組織，發現、運用的機會 (Seefeldt, 1992)。綜合以上教學建議，提出下列兩點：

- 一、幼童數學教學應從數量概念學習著手，才進入數數的練習，以幫助幼童建立正確數的概念。
- 二、結合幼童的生活經驗，培養幼童觀察、評估、比較、預測，並且讓幼童有具體操作的機會，為幼童奠下良好數學基礎。

研究的省思，可以針對不同族群間的差異表現進一步的探討，如不同種族或文化的幼童在數量上的推理表現作跨文化的探討。

誌謝

「感謝美國傅爾布萊特基金會 (Fulbright Foundation) 贊助經費、美國夏威夷大學 (University of Hawaii at Manoa) 心理系 (Department of Psychology) 提供設備，以及心理系教授 Catherinen Sophian 博士協助下，完成此研究。」

參考書目

一、中文部分

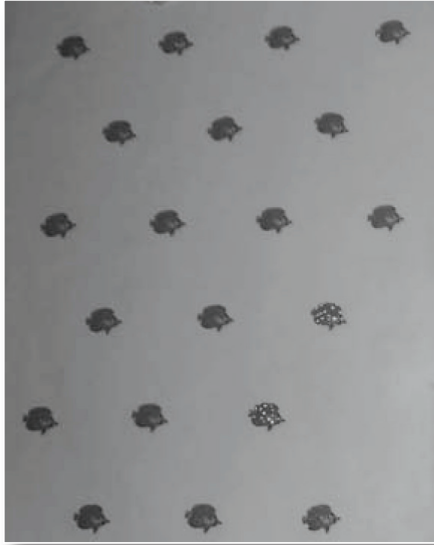
- 林清山譯 (1992)。教育心理學·認知取向，第五刷，遠流出版公司。
- 周淑惠 (1999)。幼童數學新論·教材教法。台北：心理出版社有限公司。
- 張春興 (1995)。教育心理學·三化取向的理論與實踐。台北：東華書局。
- 陳埤淑 (2007)。小學二年級數量推理與解題策略之跨文化研究。屏東教育大學教育學報，26，649-672。
- 劉秋木 (2006)。國小數學科教學研究。台北：五南圖書出版有限公司，第九刷。

一、英文部分

- Copley, J. A. (2000). *The young child and mathematics*. Washington D.C.: NAECY.
- Cordes, S. & Gelman, R. (2007). The Young Numerical Mind: When Does It Count? Retrieved from <http://rucss.rutgers.edu/~chenml/411/CordesandGelman.pdf>, 4/14/2007
- Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. S. (2004). Core systems of number, *Trends In Cognitive Sciences* 8 (7), 307-314.
- Fusion, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D.A.Grouws (Ed.): *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. MacMillan.
- Ginsburg, H. P. & Opper, S. (1988). *Piaget's theory of intellectual development*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
- Graziano, W.G., Musser, L. M., Rosen, S. & Shaffer, D. (1982). The development of fair play standards in same-and mixed-race situations: Three converging studies. *Child Development*, 53 (4), 938-947.
- Huntley-Fenner, Gavin (2001). Children's understanding of number is similar to adults' and rats': numerical estimation by 5-7-year-olds. *Cognition*, 78, B27-40.
- Huntley- Fenner, G. N., & Cannon, E. (2000). *Effects of magnitude and ratio on preschoolers' numerical comparisons*. (Psychological Science).
- Lipton, J. S. & Spelke, S. E. (2006). Preschool children master the logic of number word meanings. *Cognition*, 98, B57-66.
- McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction in infants. *American Psychological Society*, 15:11, 776-781.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (2006). *Curriculum focal points-for prekindergarten to grade8 mathematics..* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Piaget, J., & Szeminshk, A. (1952). *Child's conception of number* (C. Gattenoand, F. M. Hodsdon, Trans.). New York: TheHumanities Press Inc. (Original worublished 1941).
- Piaget, J., (1953). How children develop mathematical concepts, *Scientific American*. 189 (5), 74-79.
- Pike, C. D., & Forrester, M. A. (1997).The influence of number-sense on children's ability to estimate measures. *Educational Psychology*,17 4, 483-500.
- Seefeldt, C. (1992). *The Early childhood Curriculum: A Review of Current Research*. Teacher College Press Inc.
- Siegler, R.S., & Opfer, J., E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14, 237-243.

- Slaughter, V., Kamppi, D., & Paynter, J. (2006). Toddler subtraction with large sets: Further evidence for an analog-magnitude representation of number. *Developmental Science*, 9, 33-39.
- Sophian, C. (2000a). From objects to quantities: Developments in preschool children's judgments of aggregate amount. *Developmental Psychology*, 36, 724-730.
- Sophian, C. (2000b). Perceptions of proportionality in young children: Matching spatial ratios. *Cognition*, 75, 145-170.
- Sophian, C. (2002). Learning about what fits: Preschool children's reasoning about effects of object size. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 290-302.
- Sophian, C. (in press). Quantitative comparison without numbers. *Children Mathematics*.
- Turconi, E., Campbell, J. I. D., & Seron, X. (2006). Numerical order and quantity processing in number comparison. *Cognition*, 98, 273-285.
- Xu, F., & Spelke, E.S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74, 1-B11.
- Xu, F. (2002). The role of language in acquiring object kind concepts in infancy. *Cognition*, 85, 223-250.
- Xu, F. (2003a). The development of object individuation in infancy. In H. Hayne & J. Fagen (eds.), *Progress in Infancy Research*, 3 (pp. 159-192). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. (pdf)
- Xu, F. (2003b). Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition*, 89, B15-B25.
- Xu, F., Carey, S. & Quint, N. (2004). The emergence of kind-based object individuation in infancy. *Cognitive Psychology*, 49, 155-190. (pdf)
- Xu, F., Spelke, E.S., & Goddard, S. (2005). Number sense in human infants. *Developmental Science*, 8, 88-101.
- Xu, F. (2005). Categories, kinds, and object individuation in infancy. In L. Gershkoff-Stowe and D. Rakison (eds.), *Building object categories in developmental time* (pp. 63-89). Papers from the 32nd Carnegie Symposium on Cognition. New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Xu, F. & Arriaga, R. I. (in press). Number discrimination in 10-month-old infants. *British Journal of Developmental Psychology*. Retrieved from www.psych.ubc.ca/~fei May, 8, 2006.

附件一 R 20 魚 vs. O 24 青蛙二、英文部分



初任國中教師之數學哲學觀與教學實務的個案研究

A Case Study of a New Junior High School Teacher's Philosophical Perspective of Mathematics and Teaching Practice

王明慧*
Ming-Hui Wang

柳賢**
Shian Leou

洪振方***
Jeng-Fung Hung

(收件日期 96 年 6 月 1 日；接受日期 96 年 8 月 19 日)

摘要

本研究目的在分析初任教師的數學哲學觀與教學實務，並探討其在這兩者的一致性，以及影響這兩者的經驗。研究對象為一位男國中教師。採詮釋研究法，依據 Ernest 的五種數學哲學觀點為判準作資料分析。主要研究結果：1. 數學本質的概念是形成個案教師之數學哲學觀的核心，並影響到他的教學實務；2. 個案教師之數學哲學觀與教學實務均呈現絕對論的觀點；但針對五種數學哲學觀點，他在這兩方面的表現並未完全一致；3. 影響個案教師之數學哲學觀與教學實務的經驗有：他人之期望、個案教師本身，以及制度化之課程；但全面性的國家教育政策與方案卻是一個負面影響個案教師的經驗。

關鍵詞：教學實務、絕對論、數學哲學觀

* 國立高雄師範大學科教所博士班（國立高雄師範大學附屬中學數學教師）

** 國立高雄師範大學數學系兼任教授暨前副校長

*** 國立高雄師範大學科教所教授

Abstract

The purpose of this research is to analyze a new case teacher's philosophical perspective of mathematics and teaching practice; we also explore the coherence and the experiences influencing between his philosophical perspective of mathematics and teaching practice. The subject is a male junior high school math teacher. This research adopts the qualitative method. According to Ernest's five philosophical perspectives, we analyze the data. The main results of the study are as follows:

1. The core of the case teacher's philosophical perspective of mathematics lies in the understanding of the nature of mathematics, which influences his teaching practice.
2. The case teacher's philosophical perspective of mathematics and teaching practice are belong to absolutism; based on the five philosophical perspectives, The case teacher's philosophical perspective of mathematics and teaching practice show inconsistency.
3. The influent factors of the case teacher's philosophical perspective of mathematics and teaching practice include the others' expectation, case teacher himself, as well as the institutionalization curriculum; but the overall national education policies and the plans will influence the case teacher's experience negatively.

Key words: Teaching practice, Absolutism, The philosophical perspective of mathematics

壹、前言

一、研究動機

「數學的本質是什麼」，這個古老議題的討論絕對不會有最終的結論，因為數學哲學所發展的內容是，針對數學的各種不同面向的描述，每一位思想者的看法和觀點；而這個議題的重要性就在於，這些對數學的各種看法和觀點將影響到教師的數學教學和學生的數學學習 (Handal,2003)。誠如 Southwell (1999) 所說：「個人在其所受教育的洗禮之下，形成的人生哲學觀會影響我們決定如何過我們的生活，而個人的數學哲學觀則是，當我們置身在教室和學校的環境中的時候，會影響我們確定我們所要採取的數學學習與數學教學的方式。」由此可知，教師之數學哲學觀的研究在數學教育中的重要性可見一斑。

關於數學哲學在數學教育中的特殊性，Ernest (1991b) 選擇了三個議題來作陳述：(1) “數學知識是一種最終的產物” 對立於 “數學知識是一種知道 (knowing) 的活動，或是一種知識的獲得”；(2) “數學是一門孤立與離散的學科” 對立於 “數學與人類的知識組成是連結的，並且是人類之知識組成中的一個部分”；(3) “數學是客觀的與價值中立的，它僅和自己的內部邏輯連結” 對立於 “數學是人類文化的一個完整部分，並且在其他的知識領域中是充滿價值的”。而數學教育中的哲學重要性就在於，教師心中對數學學科的圖像 (image) 將影響其對數學內容知識的解釋，以及他的教學方法。

Hersh (1986) 指出：「發生在教室內，教師如何進行數學教學的個人觀點是強烈地來自於教師個人對數學本質的理解，而不是來自於他或她相信 “最好的教學方法是什麼”。」因此，若要讓數學教室中的情境產生合適的變化，教師願意改變他們的方法來進行教學，那就必須透過教師本身能夠建構和概念化一些異於傳統上對數學學科的觀點。例如，假如數學知識的本質是傳統柏拉圖主義的主張，即數學知識僅是一種本來就存在於外部環境中只等待被發現的實體或現象，那麼教師的數學教學就只要將這些永久不會改變的知識傳遞給學生就好，而學生學習數學時就必須接受這些永久不會改變的知識，它們是真理、是事實，學生學習它們時並不需要有任何的推理或質疑；但是，假如數學知識的本質是一種文化的、創造的和經驗的活動，那麼教師在進行數學教學時就會支持，學生的數學學習是必須站在建構他們自己的數學知識的立場，並不需要考慮他們的學習方法是如何地不同，或者他們的學習方法可能是來自於習俗的與傳統的數學標準等 (Handal,2003)。

綜上所述，教師之數學哲學觀的檢測就變成數學教育研究的一個重要觀點與議題。國內、國外一些探討教師之數學相關信念與教學實務的研究，有部分研究結果涉及數學哲學的範圍（例如，呂玉琴、溫世展，2001；王郁華，1996；Raymond,1997; Chin,1995; Thompson,1984）；至於直接探究教師之數學哲學觀與教學實務的研究多數只針對數學學科、數學學習與數學教學這三個向度（例如，Teo,1997; Wilson,1994; Lerman,1990; Ernest,1989）；能夠從數學哲學理論並使用完整的數學相關信念系統模型（表一）來進行的研究（例如，Ernest,1991a; Ernest & Greenland,1990），以及能夠進一步探究影響教師之數學哲學觀與教學實務是否一致的限制因素的研究（例如，Pepin,1999）為數依然不多；

國內直接以數學哲學為媒介所進行的研究（例如，鄭章華、王夕堯，2001）也是少見。有鑑於此，本研究將以 Ernest (1991a;1991b) 的數學相關信念系統模型為判準，對教師之數學哲學觀與教學實務進行探究，並分析個案教師在這兩者的一致性，以及影響這兩者的經驗，以作為日後探究有關教師之數學哲學觀的後續研究之參考。

二、研究目的

基於上述動機，本研究目的如下：

1. 分析個案教師之數學哲學觀與教學實務。
2. 分析個案教師之數學哲學觀與教學實務的一致性。
3. 探討影響個案教師之數學哲學觀與教學實務的經驗。

三、名詞詮釋

為了使本研究之用語能夠清楚，界定涉及之重要名詞如下：

(一) 數學哲學觀

Ernest (1991a) 定義數學哲學是：一種關於數學知識本質的個人理論、一些能夠獲得與證實的過程，以及一些相關到人類之經驗領域的方法。本研究涉及的數學哲學觀有 --

1. 絕對論 (Ernest,1991b) 指：「數學知識是由絕對的真理所構成的」這種觀點，數學知識本來就真實地存在著，它是真理，數學知識並不需要依賴發現它們的那些數學家。
2. 可錯論 (Ernest,1991b) 指：「透過數學家發明數學之實際的和潛在的結構，而在這種人為的發明過程中，所獲得的數學知識是可錯的、有條件的」這種觀點。

在本研究中，研究者界定教師的數學哲學觀是指，針對 Ernest 的「數學相關信念系統模型」中的五個信念系統（即數學知識理論、數學學習理論、數學教學理論、數學評量理論、數學教育目的），個案教師所持的數學哲學觀點。

(二) 教學實務

本研究指的教學實務包括兩種表徵 --

1. 傳統的表徵：它所考慮的表徵程序是，教給學生已經證明的規則或演算法，示範數學的「運作 (work)」給學生看，然後提供給學生一些特例做練習 (National Research Council,1989)。
2. 改革的表徵：它被理解成，聚焦在解決問題、推理、數學的溝通，以及呈現在 NCTM (1989) 標準內的連結，即，以一種建構主義的理念推動數學教育。

四、研究限制

基於研究目的，以及時間與人力，本研究僅以一名初任教師為研究對象，選擇其只具一年的國中教學資歷，並且擁有數學學士學位的背景，而非隨機選取，故不宜將研究結果作過度的推論。

貳、文獻探討

Thompson (1992) 指出：「在數學中，有關學科內容和學科內容教學的教師概念（包括：教師的信念、觀點和偏愛），在「教師效能」這個令人關注的議題上，它扮演了一個重要的角色，就好像是學科和學習者之間的一座主要橋樑一樣。」為了能瞭解教師之數學哲學觀與教學實務的關聯，以下從數學教育中的哲學省思、教師之數學哲學觀與教學實務的聯結，以及檢測教師之數學哲學觀的模型三部分加以探討。

一、數學教育中的哲學省思

關於數學教育的問題，綜觀二十世紀之數學師資教育計畫的縱向發展脈絡是：過去 1940 年代是以促進教師的數學教學和學生的數學學習為主要目標；到 1950 至 1960 年代，新數學運動期間的計畫則是鼓勵數學教師在教學時能夠強調數學知識的公理特性與結構特性，而不是數學知識的應用特性；一直到二十世紀後期，數學教育強調的是問題解決的能力，以及應用的能力。從數學哲學立場分析此發展就是，在二十世紀，數學教育已經受到形式與邏輯這兩個基礎主義學派（屬絕對論）的強烈影響 (Hersh, 1979; Rogerson, 1994)。

隨著數學教育持續地發展，另一種與基礎主義相互對立的觀點（即可錯論）也同時在蘊釀，逐漸形成擬經驗的概念（擬經驗論 (Lakatos, 1976) 是：在絕對論與可錯論這兩種觀點之間作區分，強調的是數學的實務，而不是否認數學物件的實在性）。此發展反映出：在二十世紀的後半世紀，原本支配學校數學課程的邏輯、形式主義觀點已慢慢轉移到擬經驗主義的觀點；相對地，教師在教學方式上努力改革的特徵是：遠離以詳細講述形式的授課方式，呈現另一種對立的實務，這種實務鼓勵學生在學習的過程中能有更積極的、主動的和口頭的參與 (Schmittau, 1991)。此結果也使得「數學是什麼」，以及學生應該要學「怎樣的數學內容」（即數學本質的問題）開始受到教師們的關注。

又 Hersh (1986) 主張：「教師個人對數學本質的理解，形成了他在教室內如何進行數學教學的個人觀點。」因為教師個人的數學哲學觀會影響到他 / 她的教學實務和學生的數學學習，所以教師個人之數學哲學觀的探討與檢測，就成為數學教育中之師資教育研究的一個重要議題；本研究以 Ernest 的數學相關信念系統模型為判準，分析個案教師持有的數學哲學觀，進一步討論這些觀點對其教學實務的影響。

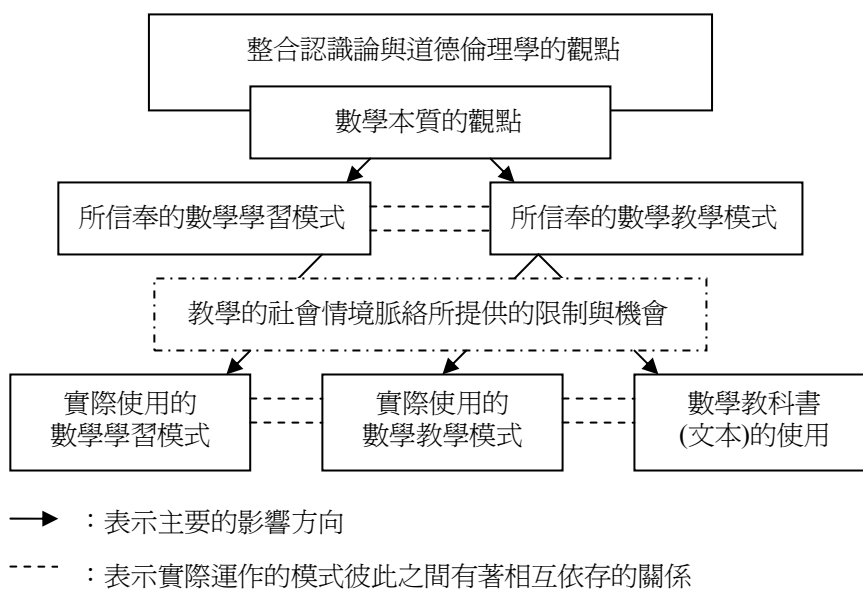
二、教師之數學哲學觀與教學實務的聯結

關於教師之數學哲學觀與教學實務的聯結，以下探討 Ernest (1991b) 和 Golafshani (2002) 二位學者的論點：

（一）Ernest 的理論 -- 教師的數學哲學信念與其教學實務之間的關係

關於教師個人之數學哲學觀對其教學實務的影響，Ernest (1991b) 提出如下圖一的機

制模式：



圖一 教師的數學哲學信念與其教學實務之間的關係 (Ernest,1991b)

上圖顯示數學師資教育中的一個主要成分是：教師個人的數學哲學觀支持第二層的兩個成分，即教師所信奉的數學學習模式與數學教學模式。然而，在教學的社會化脈絡所提供的限制與機會之下，我們本來預期所信奉的理論對實務應該會發生的影響卻產生了變化，會有這樣的結果是因為，教學的社會化脈絡所提供的限制與機會包含了許多的因素，例如，他人（學生、父母、老師、上級等）的期望；或者也可能是來自於制度化的課程（例如，所採用的課程內容或是課程綱要、評量系統等），以及全面性的國家教育方針等。

上述論點與 Pepin (1999) 的主張相同：「由於很多的限制，例如，固定的課程、時間壓力和很多其他的外部因素，使得教師的數學概念和數學的教學與學習不是以一種簡單的因果方式相關到他們的教學實務。」然而很多的研究者和研究結果都支持，從數學哲學的立場，教師所持的觀點或信念將會影響到他所採的決策或行動 (Abelson,1979)，特別是教師心中對數學學科的圖像會影響教師對該學科內容知識的解釋和他們的教學方法。

(二) Golafshani 的主張 -- 教師之數學概念對教學實務的影響

關於教師心中對數學學科的圖像，將如何影響教師對數學內容知識的解釋，以及他們的教學方法，Golafshani (2002) 有如下的具體描述：

首先，關於數學和數學教學與數學學習，持有絕對論觀點的教師他的作法是，要創造一個以教師為中心的教學環境，形容數學教學的一個比喻就如同要求學生必須將規則記憶起來一樣，把數學描繪成一個絕對可靠的學科。持有這種觀點的教師把數學呈現給學生的方式傾向於，視數學是一門線性學科、一些事實與技能，同時，教師普遍地呈現數學的特徵是一種與數字相關的紙筆活動。由於“學習者對數學技能是否熟練”是教師判斷數學學習成效的主要客觀性標準，所以要求對任何數學的步驟要一步一步清楚的呈現，並且強調

對於所獲得的答案，不管是對的或錯的，對於自己所使用的這些數學技能必須要很熟練。

其次，當教師是以促進者的身分存在於他們的教室內時，透過允許學生進行探究和調查研究，持有數學建構觀點的教師所採取的教學模式是一種師生互動的方式。問題解決是持建構論之數學教師的教學中心，這種有目的的解題活動常常是發生在需要推理的與創造性的思考、採集與應用資訊、發現、發明、傳達與檢測觀念等的問題情境中。此時，這個教室是屬於一種建構的環境。

綜上所述，教師的教學實務確實與教師對數學學科所持的哲學觀點有關聯，教師的數學哲學觀會影響到其教學實務，但由於存在一些限制因素，教師的數學哲學觀並不一定是以一種簡單的因果方式相關到他們的教學實務；本研究從個案教師所持之數學哲學觀點與其教學實務的表徵，分析個案教師在這兩者的一致性，以及影響這兩者的經驗。

三、檢測教師之數學哲學觀的模型

Ernest (1991b) 混合 Perry 理論的認識論架構、個人的數學哲學觀和道德價值，以及五種社會群體的不同利益（工業訓練者、技學實用者 - 著重在實用；古老人文主義者 - 著重在純數學的諄諄教誨；進步教育者、公眾教育者 - 著重在個人的發展）等，進而產生數學教育的五種意識型態。根據這五種意識型態，他發展出一個理論模型，可以讓個人反思自己的數學哲學觀是什麼，模型經 Ernest (1991a; 1991b) 改編後，如下表一：

表一 五個數學相關信念系統的一個發展序列

教師之數學相關信念系統的數學哲學觀之範圍						
信念系統	數學哲學觀點	二元絕對論	多元絕對論	分離的相對絕對論	連通的相對絕對論	相對可錯論
			數學是確定的，由絕對的真理所形成，並且非常地依賴於權威	承認很多的方和可能性，並且均被視為是合理的：與應用和科技連結	數學的真理依賴於內部的結構、規則和形式：使用合理的判準當基礎來選擇不同的觀點	數學的真理依賴於內部的結構：強調個人知道上的角色 -- 在理解上的自信
數學知識理論		一種事實和規則的聚集	一種不必質疑的、有用的知識本體	一種有結構的純知識本體	一種過程的觀點：個人化的內在心智活動	一種社會建構的實務
數學學習理論		辛苦地工作，努力練習，並且死記硬背一些解決問題的方法	強調技能的獲得和練習，以及實務的經驗	理解與應用是能夠進步的關鍵	以活動和遊戲探索為核心	透過質問和協商的方式來獲得數學知識本質的意義

數學教學理論	權威主義式的傳遞訓練，沒有任何一些不必要的作法	依據工作（數學）的相關性來給予技能的指導	解釋，傳遞知識的結構	（讓學生）在免於失敗的環境中促發個人式的探索學習	透過討論和對話的方式，以及提出能夠引發概念衝突的問題來進行數學教學
數學評量理論	基礎的形式測試，沒有保護與虛假	外部的測試和技能認證	可以區分出能力程度的外部測驗	透過教師的引導，讓學生能夠避免失敗的非形式評量	一種協商的和非競爭方式的評量
數學教育目的	回歸到基礎的能力：計算能力和嚴格的社會訓練（壓抑的）	能夠通過應用數學技術的認證是非常重要的（工業中心的）	純數學知識的傳遞（數學中心的）	激發創造性，經由學習數學的歷程獲得自我的領悟（兒童中心的）	經由數學的訓練，能夠培養具批判覺察能力和民主觀念的公民（解放的）

上述模型中，每一種觀點的特色如下：

1. 二元絕對論：視數學是確定的，是由絕對的真理組成的，它非常依賴權威。這個觀點具有兩個特徵：(1) 用二分法建構數學，例如，絕對的對和絕對的錯，以及絕對的規則等。(2) 數學的標準判斷是由專家認證的，具有絕對的權威性。
2. 多元絕對論：視數學是正確的，無庸置疑的真理。根據所要解決的問題，個人可以從多元的方法中權宜地選擇合適與實用的方法，這些方法的好與不好並沒有一個可以作為選擇的判斷基礎，只要這些方法或技術可以應用並解決問題就好了，它們的理論依據並不需要考慮。因此，數學可以被自由地應用，並不需要對它質疑或檢驗。
3. 分離的相對絕對論：強調數學的客觀性和規則、邏輯的內在關係和證明，以及數學理論的形式結構。這種主觀的數學哲學觀，形式的絕對論立場是最適合用來作為對它的描述。
4. 連通的相對絕對論：數學知識被看成是絕對的。這種觀點強調個人在數學上的知(knowing)的角色，以及個人在瞭解、精通某一數學主題或課程的信心。這種主觀的數學哲學觀是一種進步的絕對論立場。
5. 相對可錯論：強調我們對數學知識的瞭解是經由社會建構的，而且數學知識是會演化的和成長的，數學知識的價值在於社群的認同與社會的需求；所以數學知識與其價值都與“社會”和“發展”有關。這種相對可錯論的立場是以“人”為中心的，因此可以支持“數學知識”、“個人”和“社會整體”這三個層次的發展。

由於透過此模型我們可以獲知教師的數學哲學觀點，一些相關研究所採用的數學哲學觀點與 Ernest (1989) 的觀點相似（例如，Raymond,1997; Lerman,1990; Thompson,1984），也有實徵研究使用此模型來分析教師的數學哲學觀和教學實務（例如，Ernest &

Greenland,1990)。基於本研究的目的，希望能透過一個有理論依據、完整有系統的判準來檢測教師的數學哲學觀，進一步討論這些觀點對其教學實務的影響，故本研究採用此模型對個案教師進行分析。

參、研究方法與步驟

本研究主要在分析個案教師的數學哲學觀與教學實務，並探究這兩者的一致性和影響這兩者的經驗。茲將研究對象、研究方法、研究工具、實施步驟及資料分析的方法分述於下：

一、研究對象

基於研究目的、時間與人力，本研究僅以一名初任教師為研究對象，除了選擇其只具一年的國中教學資歷，並且擁有數學學士學位的背景（個案教師是男性且師範大學畢業）之外，由於研究個案是研究者研究期間本校唯一的一位國中部新進教師（本校其餘國中部教師的教學資歷至少九年以上），他在校教師甄試時的專業科目成績表現遙遙領先其他教師，甚至包括資深教師（甄試試題的解法具有相當的技巧性），但是當他開始於本校任教時，因為完全採坊間的講義為教材，從來不管數學課本與習作的內容，課堂教學以解題為主，機械式地重複演練試題，以及評量試題偏難等，使其倍受數學科同事及一些家長的爭議，他自己也感到困擾；透過晤談，研究者發現，此教師深受其在教學實習期間之輔導教師的影響，以成為「名師」為自己的期許目標，所以他也同時具有強烈的專業再成長的動力，正因為這樣的緣起，研究者將其納為研究對象。此外，研究者承認他傳達自己對數學學科之看法與觀點的能力，以及參與收集相關資料的意願，作為論證個案教師在問卷、教學實務觀察和面談中他所持的數學哲學觀點。

二、研究方法

本研究採詮釋研究法。承認個人的經驗解釋，透過個案教師來理解他的經驗，主要詮釋這些經驗如何對他的數學哲學觀點作解釋。說明如下：在選定研究對象後，讓其作答「教師之數學哲學觀的概述」問卷並進行教室觀察與錄影記錄（即教學實務記錄），再依據「數學相關信念系統模型」研究者將資料作歸類與分析，針對資料中模糊不清楚或不一致的內容，以及為了尋找更多的資訊（包括證實或否證研究者在書面上所察覺到的趨勢與訊息），研究者模擬可能的答案，訂定晤談大綱，進行事後的形式面談，以求對教師在資料中所呈現的個人數學哲學觀點作正確地判讀與理解；同時，研究者也會以較簡短的非形式晤談來確認教師的反應與研究者的詮釋是一致的。

三、研究工具

本研究的工具有三項，分述如下：

(一)「教師之數學哲學觀的概述」問卷(附錄)

本項研究工具系研究者參考相關之實徵研究(Eggleton,1995)所採用的研究工具，以及研究者對此一領域之文獻探討的研究心得，初步設計一份「教師之數學哲學觀的概述」開放性問卷，該問卷的初稿在本研究群中經過多次討論，並根據數學教育專家與科學史哲專家所提供的意見加以修訂，修訂之間卷經五位數學教師預測後，再經修訂，最後形成正式問卷。此問卷分成三大部分，都是針對影響教師之數學哲學觀點的因子，以及針對數學知識理論、數學學習理論、數學教學理論、數學評量理論和數學教育目的等五個信念系統教師所持有的哲學觀點，請教師作開放性回答；第一大部分有8大題，主要是透過教師之具體的實務經驗來作答；第二大部分有5大題，主要是經由教師反思自己內心的想法來作答；第三大部分是兩個教學小插曲，由模擬的實際教學情境，教師將進行的策略來作答。

(二)數學相關信念系統模型(表一)

本研究採用 Ernest (1991a;1991b) 的「數學相關信念系統模型」來描述教師之數學哲學觀。對應數學哲學的範圍，第一列呈現在不同的數學哲學觀點之間的連續發展關係；第一行即是針對被推測會發生於教師之中的五個數學相關信念系統。因此，對於教師之數學哲學觀的檢測，此模型提供一個數學哲學理論的架構，並描述教師的數學哲學觀點。

(三)形式面談大綱

本項工具是研究者依據「教師之數學哲學觀的概述」問卷，以及教學實務記錄設計的，共有12題；主要的目的是為了釐清由問卷與觀察記錄所收集的資料中，任何令人迷惑的陳述、不一致的觀念，以及尋找更多研究者在書面上所察覺到的訊息，並對收集的資料內容能夠真正地理解與洞悉。

四、實施步驟

本研究之實施步驟分為：(一)蒐集並閱讀國內外相關文獻；(二)編製「教師之數學哲學觀的概述」問卷；(三)選取研究對象；(四)進行研究施測，包括個案教師作答「教師之數學哲學觀的概述」問卷，以及研究者觀察記錄個案教師的教學實務；(五)進行施測後的形式與非形式晤談；(六)結果分析。

五、資料分析

資料分析主要分為收集的資料與資料的分析二部分，列述如下：

(一)收集的資料

相關於本研究的資料包括：「教師之數學哲學觀的概述」問卷的作答、教學實務的觀

察記錄、形式與非形式晤談的回答，以及教師在任教班級內的一些學習相關文件的收集等。資料中以 T 代表個案教師。

(二) 資料的分析

在資料的分析上，依據「數學相關信念系統模型」，可以引導對上述所收集之資料的引述、對話與資料描述作歸類；同時，該歸類資料的內容對本研究之結果的詮釋是極其重要的。由研究者在不同時刻重複區分歸類資料，並由不同人員參與區分歸類資料的工作，經討論後取得最一致的結果。

肆、結果與討論

依據問卷、教學實務紀錄及晤談等相關資料加以分析與討論。以下分爲：個案教師的數學哲學觀與教學實務、個案教師之數學哲學觀與教學實務的一致性與影響個案教師之數學哲學觀與教學實務的經驗等三部分；同時，亦呈現作爲佐證之資料的部分內容。

一、個案教師的數學哲學觀與教學實務

爲探討個案教師的數學哲學觀與教學實務，依據 Ernest 的數學相關信念系統模型，以下分別探討個案教師在五個信念系統中的數學哲學觀點與教學實務，並將所得的描述結果作歸類。

(一) 個案教師在「數學知識理論」的哲學觀與教學實務

1. 哲學觀部分：

個案教師在「數學知識理論」之哲學觀點是：數學是一種絕對的、不必質疑的和不需要證據支持的有用知識，它就存在於生活中，是科學領域的核心；數學包括很多的部份，其中主要是純數學中的技能、過程、事實與知識，以及數學知識的應用與使用（多元絕對論）；又這些技能、過程、事實與知識，可以讓我們對數學知識的應用與使用變得更熟練；而數學知識的可應用性和使用性正是數學的價值所在。

就數學知識的本質與特徵，T 認爲：「數學就是包括計算能力、聯想力、邏輯判斷、空間能力等等很多部分的一門學科，它是存在於生活中的，就在那裡，我們不用懷疑也不用思索，有些知識我們是可以發現的，但是我們又未必能發現，老師就是把存在的事實、知識教給學生而已。」

以函數概念爲例，T 作答：「研究函數的重要性，在國中是強調函數的運算，在高中則是著重函數的意義。」而 T 對於函數的描述是純數學中的定義：「 x 和 y 是兩個變數，每個 x 都有一個且只有一個對應的 y 值，則 y 是 x 的函數。」T 特別強調：「函數就是兩個符號之間的對應。」

此外，個案教師喜愛數學具有很多種型態，會需要數學的場合很多；例如，幾何、代數、統計等，在生活和科學上都用得上，數學可視為是這些領域的核心，而它的價值就在於它具有應用性。但是他不喜歡數學中的繁雜計算，或者一直重複一樣的、一些不必要的計算等，例如，公文數學就是一種。

2. 教學實務部分：

個案教師在「數學知識理論」的教學實務符合他所持的一部分哲學觀點。來自教學實務紀錄與晤談資料：

T上課並不使用課本，他是以坊間出售的重點式整理講義為教材，按照講義的編排方式與次序將數學概念一個、一個的介紹給學生（分離的相對絕對論），講解時並未說明或強調每個數學概念之間的連貫性或相關性；又T經常以數學公式進行快速且大量的數學解題，直接告知學生作法和技巧（二元絕對論）。

對於自己的上課內容與方式，以及教材的使用，T描述：「我認為大部分的數學知識都是一樣的沉悶，但是卻都很基本與重要，都要很詳細的告訴學生，像配方法的技巧就是一個例子；我以前會用課本，慢慢推導，但是後來還是用講義，因為代公式解題非常快，...。」

以數學證明為例，學生要學習的數學內容為何？T回答：「學生要學的數學內容包括計算能力，...；還有觀察，...。另外，像是立體圖形的概念，...；至於證明，需要推理能力、邏輯思考，這是很重要的，很多觀念需要整合，思考要嚴謹，解題方向才會正確；同時，證明是說服的工具，好像是我（T指自己）強迫學生接受的。」

研究者觀察到，在教學上，個案教師絕大部分的時間都是依據講義在進行解題，直接告知學生作法、技巧，補充需要的概念，透過不斷地解題、灌輸知識與技能，讓學生熟練考試的各類題型，甚少提及課本之外，生活上或科學上所應用的數學知識或數學經驗。他重視的是純數學部分的定義、概念、技能與知識，對於數學在生活和科學上的應用，個案教師所提及的也只侷限在課本的內容、舉例與例題（例如，以函數教學的舉例為例，事實上，數學函數的知識應用在生活中的經驗是非常豐富的，但T卻幾乎都以函數的定義為主，舉課本或講義上的例子來作解釋）。對個案教師而言，上課所教的數學知識是歸上課時用的，是考試時用的，至於存在生活中或科學領域中的數學知識，個案教師很少提及或幾乎不涉及，似乎學校所學的數學知識與生活中所應用的數學知識彼此是分開的，他並未將它們作聯結。

（二）個案教師在「數學學習理論」的哲學觀與教學實務

1. 哲學觀部分：

受到個案教師在「數學知識理論」之哲學觀點影響，個案教師在「數學學習理論」的哲學觀點是：學習數學就是要努力的工作，多練習，並且熟記公式和技巧（二元絕對論），透過深入的思考，以及實際的演練與操作，才能獲得知識與技能（分離的相對絕對論）。個案教師並不曾考慮發生在學習者內心中，有關數學學習的心智活動。

關於學習數學的一個理想比喻，T 描述：「學習數學就像在拼圖一樣，每一個步驟都要與前一個步驟連貫，並且思索下一塊拼圖；這就像數學的解題，假設或一開始的方向不對，就會導致解不出來或錯誤，所以要不斷地思索和嘗試錯誤。」而學習數學的一個不理想比喻，T 指出：「學習數學不應該像在觀看電影一樣，因為思考並不多；學習數學要有成效是要深入思考的，最好是能用自己的話說出來。」

又研究者發現，個案教師雖然強調學習數學必須透過深入的思考，但是要能達到學習成效主要還是實際的演練和操作練習題，在經過記憶後所獲得的技巧熟練度才是最重要的關鍵，發生在學習者內心中有關數學學習的心智活動並不是最重要的。

對於學生在學習數學、做題目時，應具備的理想表現，T 說：「要學好數學就是要付出努力，多做練習題目，該記的公式要記好，熟練各種類型題目的變化和作法，慢慢地，自然就會理解，就會了，考試時也會得心應手。」

2. 教學實務部分：

個案教師在「數學學習理論」之教學實務與他所持的一部分哲學觀點是一致的。來自教學實務紀錄與非形式晤談資料：

T 在教學中，數學解題的教學佔了大部分時間，他將講義中已整理好的，屬於同一個數學概念，只是陳述不同的各類題型逐一教給學生，一題接著一題，透過老師的不斷講解，數學知識似乎從老師往學生的方向，源源不絕地形成一條無形的運輸線一樣，不斷地，甚至重複地傳遞給學生。對於各類題型，每一題之下又有四至五題的學生演練題，T 都會叮嚀學生回家做，於下一次上課給答案並檢討。總之，T 強調「教師進行大量的數學解題教學，學生一直做練習題，熟練解題技巧」是學習數學的不二法門（二元絕對論）。

針對自己的教學實務，T 說：「學生學習數學就是要靠老師多講題目，熟悉各種題型，…，雖然概念和重點沒能夠很詳細的講，但是不要緊，只要學生肯做、多做題目，慢慢就能夠理解，就會了。」

至於從「建構數學」來看學生的數學學習，T 說：「我還是認為以前傳統的學習方法比較好，先記起來，然後再瞭解；順序是背→應用→建構，建構是輔助的。…。」

(三) 個案教師在「數學教學理論」的哲學觀與教學實務

1. 哲學觀部分：

受到個案教師在「數學知識理論」之哲學觀點影響，個案教師在「數學教學理論」之哲學觀點是：數學教學是以教師為中心的，教師的角色是演講者和解釋者，主要在於能夠清楚地說明數學概念、數學知識的結構，並且促進有效的數學學習過程。此外，由於教師是數學知識的精通者和擁有者，他可以盡量地把數學知識傳遞給學生，所以，數學教學有一種能夠讓學生的數學知識和能力變得精通的力量（分離的相對絕對論）。

關於教師的數學教學對學生學習數學的影響，T表示：「數學教學必須先讓學生知道數學的內容、概念，記起來以後，學生才可能開始理解數學，才會應用數學知識來解決題目，這是因為學生第一次學數學，教學要讓學生透徹理解是不可能的，而且，如果真要讓學生達到透徹理解，那麼這種教學就要花很多時間，同時也必須要有一些額外與過度的學習來加強。所以，老師的任務就是盡量地把該教的教給學生，好像是一種傳輸，但是要能清楚的說明和講解數學的概念與結構，幫助學生能有有效的數學學習過程。」

對數學教師的角色比喻，T認為：「數學教師就像是一位醫生，因為必須針對學生的錯誤給予糾正，老師的責任是要傳道和解惑。傳道是指傳授知識，傳遞知識給學生，學生才能獲得知識，這是最快的方法；…。」

2. 教學實務部分：

個案教師在「數學教學理論」之教學實務與他所持的一部份哲學觀點是一致的。來自教學實務記錄與形式晤談資料：

T採用結構取向的坊間講義當教材，照著講義上所整理的重點概念，依順序逐一介紹給學生，然後針對每一個概念所整理出的各類題型來進行講解（分離的相對絕對論），大部分的時間都是在進行數學解題訓練，真正花在講解數學概念的時間並不多（二元絕對論）

又T在教學上有兩個特別的現象：一是T每次要開始講解例題時，都會先要求全班一起把題目唸一次，但是在學生唸完題目之後，T並未對題目作絲毫的說明，即刻進行解題演練；另一現象是T講解尺規作圖題時，一定先用尺規把整個圖形作好才開始進行解說（二元絕對論）。

對於自己的教學，T提到：「…。教學本來是可以訓練學生邏輯思考的，但是由於現實問題，如趕進度、要多講一些題目，應付考試、基測等，所以這些訓練、邏輯思考就未能教給學生，但是，如果老師能多講一些不同題型，學生自己肯多做題目，這是可以補起來的；從聽講和做題目的過程中，無形中自然就會培

養出這些推理能力。」

至於要求學生唸題目則是因為解題時，T 必須先把題目上的圖形和條件畫或寫在黑板上，怕學生利用空檔吵鬧而已；而尺規作圖題先把整個圖形作好了，T 講解時才能連貫不中斷。

研究者發現，個案教師的數學教學是以教師為中心的，認同自己扮演的數學教師角色是數學知識的傳遞者與解釋者；認為自己透過講解的方式能夠清楚地把數學知識、數學概念教給學生，並且藉由大量的解題教學把數學知識傳遞給學生，使學生的數學變得精通。

(四) 個案教師在「數學評量理論」的哲學觀與教學實務

1. 哲學觀部分：

個案教師在「數學評量理論」之哲學觀受到他在「數學知識理論」之哲學觀點的影響，他在「數學評量理論」的哲學觀點則強調：數學評量必須是一種能夠客觀地測試「學生對數學知識與技能的使用是否熟練」的方法（二元絕對論）。

關於數學評量的方式，T 認為：「數學評量最客觀、最好的方式就是紙筆測驗，除了一些基本能力的檢測之外，例如，基本的計算能力、基礎的數學概念與解題技巧等，一些應用、推理思考的能力也可以利用特別的問題來測驗學生；……。」

關於數學評量題目的命題，T 回答：「國中的數學課程內容很少，……，只要把講義上的題目做完，要考高分並不難，就是熟練度而已。所以命題時，我會從講義上我講過的題目、給學生當練習作業的題目、平時考考過的題目，或者是從題庫中抓，我會刻意選幾題較困難的題目，因為評量測驗還是要有鑑別度，但是這些難題我在補充課外的部分時都有教。」

2. 教學實務部分：

個案教師在「數學評量理論」之教學實務符合他所持的哲學觀點。來自教學實務記錄：

T 總在每個單元結束之後即進行平時考，他選定兩份坊間的測驗卷，測驗完畢後會在課堂上訂正，給予標準答案，讓學生提出需要老師解答的題目進行講解。

對於段考的命題，T 會以講義與平時考的測驗卷題目為主，因為這是學生必須要學會的基本問題，而且老師課堂上大部分都提過，可以測驗學生在課堂上是否有認真聽講，到底聽懂不懂，回家有沒有練習，熟練度夠不夠等（二元絕對論）。

(五) 個案教師在「數學教育目的」的哲學觀與教學實務

1. 哲學觀部分：

受到個案教師在「數學知識理論」、「數學學習理論」，以及「數學評量理論」之哲學

觀點影響，個案教師認為數學教育目的主要是：讓學生學會教師要教給他們的數學內容；這包含的三個重點是，教師要教給學生的數學內容是什麼，以及要怎麼讓學生去學習，並且檢測學生的學習成效；上述三點分別連結到個案教師在「數學知識理論」（多元絕對論）、「數學學習理論」（二元絕對論），以及「數學評量理論」（二元絕對論）的哲學觀點。

就數學教育的目的，T 回答：「數學知識是不須質疑的、非常實用的，它是一種過程、技巧，一些事實知識，老師要教給學生的數學內容就是這些部分。當然，如果還要學會它的應用與使用，那老師還得訓練學生的邏輯推理跟數學思維。所以，數學教育的目的其實是很簡要明確的，就是讓學生學會老師要教給他們的所有數學內容。」

至於學生要如何學習才能達到數學教育的目的，T 指出：「學生學習數學“要能深入瞭解，然後靈活應用”，這對國中生是相當困難的，是超出國中的數學教育目的的，國中生只要能夠學到老師要教給他們的内容就很不錯了。…」T 接著說：「老師把數學知識教給學生之後，學生自己必須努力用功，盡量多做題目，自然就懂了，考試成績也不會太差。學生能把數學學會，考試有好的成績，這就是我們從事數學教育的理想和目的。」

2. 教學實務部分：

個案教師在「數學教育目的」的教學實務與他所持的一部份哲學觀點是符合的。來自教學實務記錄與非形式晤談的資料：

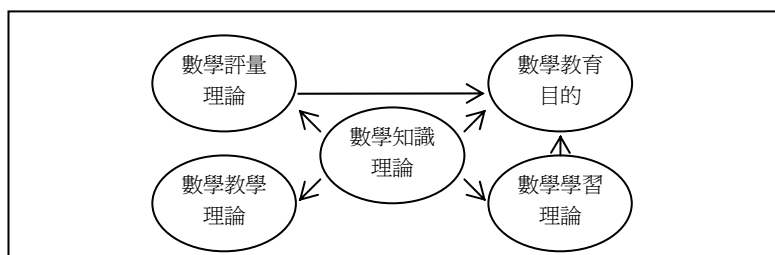
T 每介紹完一個新的概念，即刻進行多種類型的例題演示（分離的相對絕對論），並且規定課後作業，要求學生完成。T 告訴研究者：「學生是不可能自學的，靠老師教觀念讓學生知道，再利用例題來演練、實際動手做一次才會瞭解老師教的内容，才會應用；當然要熟練還必須學生自己肯練習，所以作業我是會檢查、要求的。」

又 T 在每一單元結束之後，一定會進行一次至二次的評量，段考之前則進行多次的總複習評量。T 說明：「單元評量是需要的，可以逼學生讀書做練習，不然無法知道學生的學習狀況，教給他們的是不是都會了，而且還要能夠熟練。至於段考之前的評量主要是要複習，提醒學生學過的内容有哪些，不要忘記了。」（二元絕對論）

研究者發現，個案教師講解各種類型的例題，透過大量的解題教學把數學知識教給學生，要求學生盡量多做練習題目，學生解決問題的熟練程度是一個要求的指標，能夠熟練才能理解數學概念，才會應用與使用數學的知識、邏輯推理和技巧，這時才可以保證學生學會了教師要教給他們的數學內容。

綜上所述，個案教師在「數學知識理論」的哲學觀點，連結到他在「數學學習理論」、「數學教學理論」、「數學評量理論」，以及「數學教育目的」等系統的觀點，而他在「數學學習理論」和「數學評量理論」等系統的觀點對他在「數學教育目的」的觀點也存在連結

的關係，如下圖二：



圖二 教師在五個數學相關信念系統中所持之哲學觀點彼此之間的關係

本研究結果呼應 Ernest (1991a;1991b) 的數學相關信念系統模型所要傳達的訊息：當教師能對一些新的觀念作最適當的描述時（即教師的數學本質概念），那麼已經存在每一個信念系統中的各種不同哲學觀點也將受到影響，亦即，教師在「數學知識理論」系統的哲學觀點是形成其整個數學哲學觀的核心。

二、個案教師之數學哲學觀與教學實務的一致性

由前一節的研究結果，研究群透過 Ernest 的數學相關信念系統模型，將個案教師所持的數學哲學觀點與其在教學實務上的表徵作歸類，歸類結果如下表二，並且透過此結果將檢測這兩者的一致性。

表二 個案教師之數學哲學觀與教學實務的一致性

數學哲學觀點 信念系統	二元 絕對論	多元 絕對論	分離的相對 絕對論	連通的相對 絕對論	相對 可錯論
數學知識理論	●	◎	●		
數學學習理論	◎●		◎		
數學教學理論	●		◎●		
數學評量理論	◎●				
數學教育目的	◎●	◎	●		

◎：表示個案教師所持有的哲學觀點

●：表示個案教師在教學實務上的表徵

根據表二，個案教師是絕對論的支持者，他的數學哲學觀與教學實務幾乎只集中於二元絕對論與分離的相對絕對論等觀點，僅在「數學知識理論」和「數學教育目的」等系統中的哲學觀部分有呈現多元絕對論觀點，而個案教師在五個信念系統的教學實務均有二元絕對論觀點存在；同時，個案教師在「數學知識理論」、「數學學習理論」、「數學教學理論」，以及「數學教育目的」等系統中所持有的哲學觀點與其在教學實務上的表徵並不一致，而僅有「數學評量理論」系統中的哲學觀點與其在教學實務上的表徵是一致的。

上述的研究結果，對照 Hersh (1986) 與 Russell (1943) 這兩位學者的描述是相互呼

應的。Hersh (1986) 指出：數學家的數學實務與其所持的哲學觀點並不一致；而 Russell (1943) 卻以自己為例強調：數學家的數學實務與其所持的哲學觀點是一致的。將這些描述類推到教師在數學相關信念系統中所持的哲學觀點與其在教學實務上的表徵，這兩者之間的一致性情形，由本研究所獲得的結果確實是，可能一致，也可能不一致。

三、影響個案教師之數學哲學觀與教學實務的經驗

由問卷及晤談的資料，探討影響個案教師之數學哲學觀與教學實務的經驗有：

(一) 自己當一個數學學習者的經驗

研究者發現個案教師在「數學學習理論」的觀點，有部份是來自他以前當數學學習者的經驗，亦即，他對自己是如何學習數學的感受。其感受是：學習數學就是要努力地做數學，多練習，熟記公式，還有題型和技巧，透過實際的演練和操作，才能學會數學，得到好成績。

T 說：「我國中開始對數學就很有興趣，會花很多時間做練習題目，雖然學校老師教的不好，但是我有補習，補習班老師教的我都懂，只要再把講義上的題目做完就差不多都會了，知道了，所以我的數學成績一直很好。現在的學生也是一樣，要學好數學多做數學問題就對了。」

(二) 大學的數學師資培育課程

個案教師記得大學時修過教材教法與教學實習；對於教材教法的上課內容和方式印象不深，已不復記憶，但數學史還有一些片段的印象；至於教學實習的上課情形，印象中就是教學演示，教授要求學生設計教案，然後上台演示給教授和同學看，之後教授和同學會給回饋意見及建議，所以對未來自己要怎麼當一位數學老師的想法就是，上課前把要教的內容、教案準備好，上課時把這些內容、概念教給學生，注意一下班級秩序，要求學生專心聽講等就差不多了。

(三) 大五的實習輔導教師的教學風格

當個案教師畢業至南投某國中實習後，他發覺實務上的數學教學是複雜的，從他的實習輔導教師那兒他學到很多，包括實習輔導教師上課就直接使用坊間的講義、測驗卷，要求學生不斷地做練習題目，上課秩序良好，任教班級的評量成績在年級排名幾乎都是第一，是學生和家長心中的名師等，這些都讓個案教師的印象非常深刻。

T 說：「我覺得對我影響最大的應該是在南投 ×× 國中實習時帶我的那位輔導老師，他是一位很有經驗的數學老師，從他那裡我學到很多，在教學時的一些技巧，這些是學校教授沒有教過的，他上課就直接用坊間的講義，照講義上課很清楚，講義已經有整理了，該講的都講了，也會有補充，不怕會有漏掉的，作

業就是要求學生不斷地多做練習就對了，藉著考試督促學生，他有很多現成的測驗卷可以讓學生寫，…，我也希望自己能像他一樣成為學生和家長們心中的名師，…。」

(四) 來自任教學校同事的壓力

當個案教師將自己當一個數學學習者的這些感受，以及在大五實習期間所學到的教學技能化作實際教學上的策略，以及對學生的要求之後，他的一些作法受到目前任教學校的其他資深教師的質疑，個案教師倍受壓力，他會在教學上略作調整，例如，上課教材會象徵性地使用課本和習作。

由於個案教師認為，「學生學習數學是先背、先記數學的內容知識，透過實際的操作、練習和應用，才能達到對數學概念、數學知識的真正理解與建構」，此與其他資深教師給他的建議，「著重課本中有關基本概念介紹的活動設計，其中包含主要的概念，以及延伸的概念，老師必須清楚並能連貫地教給學生，讓學生在有所理解之後，再透過實際地動手操作，真正達到徹底的理解，並不需要重複地作機械式的練習，以及太多的死記硬背」，這兩者是不一致的，個案教師因此感到困擾與壓力。

(五) 社會脈絡的變動趨勢

社會脈絡的變動趨勢，如教育政策的改革或網路、媒體的流行等，個案教師認為對其數學教學並不會有任何影響與衝突，例如，他覺得九年一貫數學課程的推動跟以前的聯考沒有不一樣，為的還是考試升學，老師仍要多講題目，學生仍要多做練習題；只是對於「建構數學」，個案教師以本身對建構主義的認知來解釋建構教學的「理念」，他不認同有「建構數學」的「教法」存在，對此項教育改革他是相當反感的。

對於「建構數學」，T說：「因為建構教學忽略了學生實際學習數學的能力，只用我們認為對學生是好的的角度來進行，這是很不適當的。我還跟我在國小當老師的同學說，「你們不要用建構數學的教法來教學生，否則我們這些國中老師會被你們害慘，都不知道要怎麼教了」。」

綜上所述，對照 Ernest (1991b) 的主張，教師的數學哲學信念與教學實務之間的關係能否一致，還必須考量來自教學的社會化脈絡所提供的限制與機會。在本研究中，影響個案教師之數學哲學觀與教學實務的經驗確實包括：(1) 他人之期望的部份，有個案教師的國中數學老師、個案教師所實習學校的輔導老師、個案教師的同事等；(2) 個案教師本身的部份，有自己學習數學的經驗；(3) 制度化之課程的部份，有數學師資培育課程、九年一貫的數學課程。

伍、結論與建議

一、結論

綜合本研究所探討的問題及重要發現，提出三項結論：

(一) 數學本質概念(即「數學知識理論」系統中的哲學觀點)是形成個案教師之數學哲學觀的核心，並且影響到他的教學實務。

根據圖二呈現出個案教師在「數學知識理論」系統的哲學觀點，連結到他們在「數學學習理論」、「數學教學理論」、「數學評量理論」，以及「數學教育目的」等系統的哲學觀點；亦即，個案教師對「數學知識理論」的哲學觀點會直接影響到他對其他信念系統所持的哲學觀點；所以「數學本質」的概念是形成個案教師之數學哲學觀的核心。

(二) 針對五個數學相關信念系統，個案教師之數學哲學觀與教學實務均呈現絕對論的觀點；但是，就模型中的五種數學哲學觀點，個案教師所持有的觀點與其在教學實務上的表徵，可能是一致的，也可能是不一致的。

根據表二，個案教師之數學哲學觀點與教學實務幾乎只集中於二元絕對論與分離的相對絕對論等觀點，僅在「數學知識理論」和「數學教育目的」等系統中的哲學觀部分有呈現多元絕對論觀點，而個案教師在五個信念系統的教學實務均有二元絕對論觀點存在；同時，個案教師僅有「數學評量理論」系統中的哲學觀點與其在教學實務上的表徵是一致的，其餘四個信念系統中所持的哲學觀點與其在教學實務上的表徵並不一致。

(三) 影響個案教師之數學哲學觀與教學實務的經驗是，來自教學的社會化脈絡所提供的限制與機會，這是要特別關注的；其中包括，他人之期望、個案教師本身，以及制度化之課程；至於全面性的國家教育政策與方案卻是一個負面影響個案教師的經驗。

本研究中，影響個案教師之數學哲學觀與教學實務的經驗有三個部分：(1) 他人之期望的部份，包括，個案教師的國中數學老師、個案教師所實習學校的輔導老師、個案教師的同事等；(2) 個案教師本身的部份，包括，自己學習數學的經驗；(3) 制度化之課程的部份，包括，數學師資培育課程、九年一貫的數學課程。然而，個案教師對「數學師資培育課程在實際教學情境中的應用與幫助」的感受平淡，至於全面性的國家教育政策與方案，包括，九年一貫數學課程的推動，以及建構教學等，這些卻是負面地影響著個案教師；這樣的結果是頗值得深思的。

二、建議

根據研究結果與發現，提出對數學師資教育的省思與進一步研究的建議：

(一) 對數學師資教育的省思

基於本研究之結果，從數學師資教育的觀點加以探討。

1. 數學師資教育學者應當幫助數學教師能夠“看見”存在多元的數學哲學觀點，而那些數學哲學觀點會影響到數學教師對不同數學教學方式的選擇。同時，也應當協助教師，透過使用多元的數學哲學觀點去檢視數學和他們自己的教學，進而增進專業的教學知能。
2. 應從不同的數學哲學觀點考慮數學師資教育的進修課程、內容與範圍，例如，學習的概念改變理論、多元化評量的概念、數學史、建構教學的理念等；同時，對於社會發展的脈絡、國家的教育政策方針和國際數學教育趨勢的覺察，均能幫助數學教師的專業成長。

(二) 進一步研究的建議

對於進一步研究，從研究樣本與研究變項等方面，提出一些建議。

1. 就研究樣本方面：本研究僅以一名初任教師為研究對象，選擇其只具一年的國中教學資歷，以及擁有數學學士學位的背景，是男性且師範大學畢業。未來之研究可增加樣本數目，或者選擇具有不同背景的研究對象，例如，男或女教師、國小或中學教師，以及是師範或非師範院校畢業之教師等來進行探究。
2. 就研究變項方面：本研究中之個案教師在傳統的數學觀點之下，他認為他的數學教學是對的、是成功的，如果學生的學習成效未能達到預期的理想，那是因為學生個人不努力的因素。故是否可以找到一個有效的模式，能夠讓數學教師已形成的數學哲學觀與教學實務產生調整，甚至是改變的？未來可以進行探究。

參考文獻

一、中文部分

- 王郁華 (1996)。台灣南區中學數學科教師信念之研究。國立高雄師範大學數學系碩士班碩士論文。
- 呂玉琴、溫世展 (2001)。國小、國中與高中教師的數學教學相關信念之探討。國立台北師範學院學報，第十四期，459~490。
- 鄭章華、王夕堯 (2001)。協助國中數學教師改變教學初探—以數學哲學為媒介。科學教育研究與發展。第二十三期，57-81。

二、英文部分

- Abelson, R. (1979). Differences between belief system and knowledge system. *Cognitive Science, Vol.3*, pp.355-366.
- Chin, C. (1995). *Mathematics teachers' beliefs, their classroom practices and influences on student learning: four case studies*. A thesis submitted for degree of doctor of philosophy at the University of Cambridge.
- Eggleton, P. J. (1995). *The Evolving Mathematical Philosophy of a Preservice Mathematics Teacher*. Printed in 1997 by xerographic process on acid-free paper. UMI Dissertation Services. A Bell & Howell Company.
- Ernest, P. (1989). The knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model. *Journal of education for Teaching, 15(1)*, 13-33.
- Ernest, P. (1991a). Mathematics teacher education and quality. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 16 (1)*, 56-65.
- Ernest, P. (1991b). *The philosophy of mathematics education*. Bristol, PA: Falmer Press.
- Ernest, P., & Greenland, P. (1990). *Teacher belief systems: Theory and observations*. British Society for Research on the Learning of Mathematics Annual Conference Proceedings. Oxford, England: BSRLM.
- Golafshani, N. (2002). Teachers' Conceptions of Mathematics and their Instructional Practices. *Philosophy of Mathematics Education Journal 15*.
- Handal, B. (2003). Philosophy and pedagogies of mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal 17* (May 2003).
- Hersh, R. (1979). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. *Advances in Mathematics, 31*, 31-50.
- Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp.9-28). Boston: Birkhauser.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematics discovery*. London: Cambridge University Press.
- Lerman, S. (1990). Alternative perspectives of the nature of mathematics and their influence on the teaching of mathematics. *British Educational Research Journal, 16 (1)*, 53-61.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report on the future of mathematics education*. Washington, D. C.: National Academy Press.

- Pepin, B. (1999). Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: The theory, and that is manifested in mathematics teachers' work in England, France and Germany. *TNTEE Publications*, 2(1).
- Raymond, M. A. (1997). Inconsistency Between a Beginning Elementary School Teacher's Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1997, Vol.28, No. 5, 577-601.
- Rogerson, A. (1994). Symbols as cultural communication-A historical and didactical perspective. *Paper presented at the 46th International Meeting of the CIEAEM, Toulouse, France.*
- Russell, B. (1943). *The principles of mathematics*. New York: Norton.
- Schmittau, J. (1991). Mathematics education in the 1990s: Can it afford to ignore its historical and philosophical foundations? *Educational Theory*, 41 (2), 121-133.
- Southwell, B. (1999). The lowdown on the philosophy of mathematics education. *Reflections*, 24(1), 44-47.
- Teo, W. L. (1997). *Espoused Beliefs of Singapore Teachers about Mathematics and its Teaching and Learning*. Master paper, Ontario Institute for studies in Education of the University of Toronto.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instruction practice. *Education Studies in Mathematics*, 15, 105-127.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conception: A Synthesis of the Research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (p.127-146). New York: Macmillan Publishing Company.
- Wilson, M. R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 346-370.

附錄

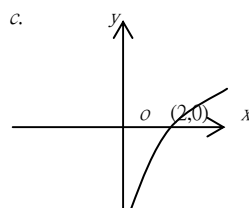
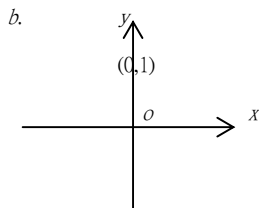
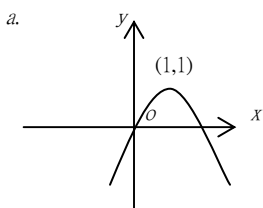
「教師之數學哲學觀的概述」問卷

*問卷 (A)

1. 請列出你曾經修過的數學專業科目與數學教育科目，並敘述當時數學教育科目的課程內容與上課方式。
2. 你認為在國、高中階段，我們研究函數的重要性是什麼？
3. 函數是什麼？請舉例有什麼函數，並描述你所舉例之各類函數的應用。
4. 你認為在國、高中階段，我們研究各種函數的重要性是什麼？
5. 解 $(1)2^x = 128$

$$(2)3^x = 309$$

(3) 請寫出下列圖形的函數：



- (4) 針對以上三個小題你所用的解法，請說明你為何會採取如此的作法？
- (5) 若以上三個小題中的問題是評量的試題，請猜測你的學生會如何作答？又你的評量標準為何？
6. 你是否認為數學知識是存在於日常生活中的呢？如果是，請描述在課室外你能夠使用數學的某種狀況。
7. 考慮以下的比喻：學習數學就像是

在裝備線上的一種運作	觀看一場電影
用一種烹飪法來烹煮食物	從樹上採摘水果
運作一個拼圖謎題	處理一個實驗
建造一間房子	創作一項黏土雕塑品

 - a) 針對數學的學習，以上的比喻你認為哪一個最理想？或者是你還有其他的比喻？請選擇並作解釋。
 - b) 針對數學的學習，以上的比喻你認為哪一個最不理想？或者是你還有其他的比喻？請選擇並作解釋。

8. 考慮以下的比喻：數學教師就像是一個

新聞廣播員	表演者
醫生	管絃樂隊的指揮
園丁	輔導者
傳教士	社工人員

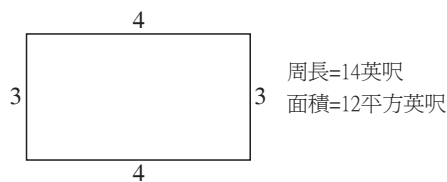
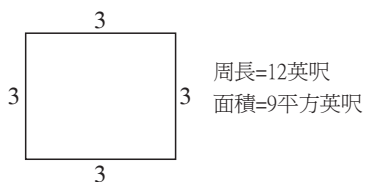
- a) 針對數學教師的教學，以上的比喻你認為哪一個最理想？或者是你還有其他的比喻？請選擇並作解釋。
- b) 針對數學教師的教學，以上的比喻你認為哪一個最不理想？或者是你還有其他的比喻？請選擇並作解釋。

*問卷 (B)

1. a. 描述學生在做數學時的理想特徵。
- b. 描述學生在做數學時的不理想特徵。
2. a. 描述一個理想的數學教師所具有的一些特徵。
- b. 描述一個不理想的數學教師所具有的一些特徵。
3. a. 你特別喜歡數學的哪一部份內容？
- b. 你不喜歡數學的哪一部份內容？
4. 誰或是什麼經驗曾影響你對數學教學的追求與看法？請詳述。
5. 你覺得你目前對數學這門學科所持有的這些觀點是如何形成的？

*教學小插曲

1. 假設牛奶的價錢是該牛奶加侖數的 $1\frac{1}{2}$ 倍，針對這個關係，指出能夠有更深入理解的表徵，並說明你的理由。
2. 想像你有一個學生非常興奮地進到教室來，他解釋他發現：增加一個長方形的周長則面積也會增加。他呈現給你下列圖形來證明他說的內容：



你將如何回應這學生？